



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н. Ельцина

**Институт
фундаментального
образования**

Л. Г. МАЛЫШЕВ

А. А. ПОВЗНЕР

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КУРСА ФИЗИКИ: МАГНИТОСТАТИКА

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер

Избранные главы курса физики:
МАГНИТОСТАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов инженерно-технических специальностей
и направлений подготовки

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 537.6(075.8)

ББК 22.334я73

М20

Рецензенты:

кафедра математических и естественно-научных дисциплин РГППУ (зав-кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *С. В. Анахов*);

завкафедрой физики УГГУ д-р физ.-мат. наук, проф. *И. Г. Коршунов*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. В. Мелких*

Малышев, Л. Г.

М20 Избранные главы курса физики: магнитостатика : учеб. пособие / Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 112 с.

ISBN 978-5-7996-2570-2

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих курс общей физики в соответствии с рабочей программой курса и образовательными стандартами. Пособие содержит теоретический материал по магнитостатике, обсуждение основных физических законов и соотношений. Изложение материала сопровождается подробным анализом и решением задач и примеров. Учебное пособие позволит студентам повысить уровень подготовки по данному разделу курса «Физика».

Библиогр.: 4 назв. Рис. 98.

УДК 537.6(075.8)

ББК 22.334я73

ISBN 978-5-7996-2570-2

© Уральский федеральный
университет, 2019

Глава 1.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

1.1. Электрический ток

Электрический ток — это направленное движение электрических зарядов, которые мы будем называть *носителями тока*. Если заряд переносится через некоторую поверхность, то говорят, что через нее протекает ток. Природа носителей тока может быть различной: свободные электроны в металлах, электроны и дырки в полупроводниках, ионы в электролитах и т. д. В дальнейшем будем подразумевать, что речь идет о металлах, а ток протекает по металлическим *проводникам*. Для возникновения тока в проводнике необходимо выполнение двух условий:

- 1) наличие в нем свободных носителей тока;
- 2) существование в проводнике электрического поля, признаком которого является разность потенциалов на концах проводника.

Свободные носители, конечно, участвуют и в тепловом движении, но его вклад в ток, протекающий через сечение проводника, равен нулю вследствие хаотичности теплового движения.

Для количественной оценки используют *силу тока* I — скалярную величину, равную заряду, переносимому через поперечное сечение проводника в единицу времени. Обычно силу тока определяют через отношение

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (1.1)$$

где dq — заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время dt . Это выражение можно записать в виде

$$dq = Idt,$$

$$q = \int_0^t Idt, \quad (1.2)$$

и если ток постоянный ($I = \text{const}$), то

$$q = It. \quad (1.3)$$

Размерность силы тока — ампер, это одна из основных единиц в системе СИ, при помощи которой определяется размерность заряда: $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$.

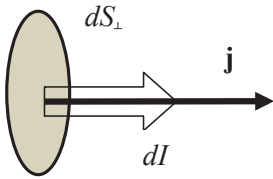


Рис. 1.1

Рассмотрим ток dI , протекающий через площадку dS_{\perp} (рис. 1.1), и введем *плотность тока* j как силу тока, протекающего через единицу площади поперечного сечения проводника ($[j] = \text{А/м}^2$):

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Сила тока dI , протекающего через площадку dS произвольной ориентации (рис. 1.2), будет точно такой же:

$$dI = jdS_{\perp} = jdS \cos \alpha = \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.4)$$

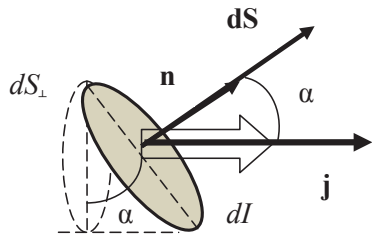


Рис. 1.2

В конечной формуле мы использовали вектор $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, направление которого совпадает с вектором нормали к поверхности.

Это выражение позволяет вычислить силу тока, протекающего через произвольную поверхность S :

$$I = \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S}. \quad (1.5)$$

В общем случае носители тока могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому

$$I = \frac{dq_+}{dt} + \left| \frac{dq_-}{dt} \right|,$$

но при этом за *направление* тока (и вектора \mathbf{j}) принимают направление движения именно *положительных* зарядов. Так, в металлических

проводниках носителями тока являются отрицательно заряженные свободные электроны, но за направление тока мы выбираем то, в котором *двигались бы* положительные заряды, если бы они были в металле в свободном состоянии.

Рассмотрим проводник с концентрацией носителей тока n . Эти носители имеют положительный заряд e и под действием электрического поля, созданного в проводнике, движутся упорядоченно со средней скоростью $\langle \mathbf{u} \rangle$ (рис. 1.3).

За время dt через поперечное сечение проводника S пройдут свободные заряды, находящиеся на участке проводника длиной $\langle u \rangle dt$, имеющем объем $\langle u \rangle dt S$. В этом объеме находится dN носителей тока с суммарным зарядом

$$dq = edN = en \langle u dt \rangle S.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} = en \langle u \rangle S, \\ j &= \frac{I}{S} = en \langle u \rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В векторной форме последнее выражение имеет вид

$$\mathbf{j} = en \langle \mathbf{u} \rangle. \quad (1.7)$$

Воспользуемся соотношением (1.6) и оценим максимальную величину средней скорости $\langle u \rangle$ упорядоченного движения носителей тока в металле, исходя из следующих соображений: элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, концентрация свободных электронов в металле имеет порядок $n \approx 10^{29}$ м³, а плотность тока в проводнике не может превышать максимально возможного значения 10^7 А/м² (это означает, что проводник сечением 1 мм² сгорит, если по нему пропустить ток, превышающий 10 А).

Тогда

$$\langle u \rangle \leq \frac{j_{\max}}{en} \approx 10^{-3} \text{ м.}$$

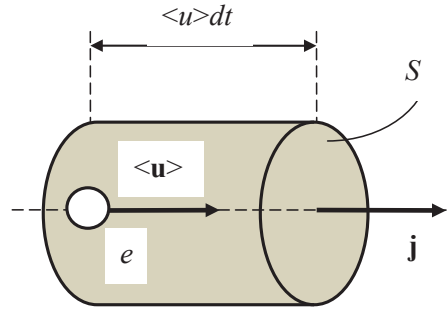


Рис. 1.3

При этом возникает «детский» вопрос: почему в таком случае замыкание, скажем, рубильника в одном месте приводит к практически мгновенному включению лампы в другом? Ответ понятен и прост: носители тока распределены по всему проводнику, и появление электрического поля приводит их в движение одновременно по всей длине проводника.

1.2. Уравнение непрерывности

Рассмотрим область пространства объемом V , в которой распределен заряд q . Этот заряд вытекает из объема через поверхность S , которая ограничивает эту область. Поэтому сила тока через эту поверхность будет равна *убыли* заряда q в единицу времени:

$$-\frac{dq}{dt} = I. \quad (1.8)$$

Это равенство легко преобразовывается к виду

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

а после применения к его правой части теоремы Остроградского — Гаусса принимает вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nabla \mathbf{j}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) носит название *уравнения непрерывности* и по сути является математическим выражением закона сохранения заряда.

Если в цепи протекает постоянный ток, то плотность ρ заряда на любом участке проводника остается неизменной и поэтому

$$\nabla \mathbf{j} = 0. \quad (1.10)$$

Равенство нулю дивергенции вектора плотности тока (1.10) означает, что поле вектора \mathbf{j} не имеет источников и линии вектора \mathbf{j} замкнуты.

1.3. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводников

Однородным называется участок цепи, в котором не действуют сторонние силы, то есть отсутствуют источники тока, с которыми мы познакомимся в следующем параграфе. Для однородных проводников Г. Ом сформулировал экспериментальный закон, согласно которому сила тока, протекающего в проводнике, прямо пропорциональна напряжению на его концах:

$$I \sim U.$$

Это соотношение он записал в виде равенства

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1.11)$$

в котором коэффициент пропорциональности обозначил как $1/R$ и назвал R сопротивлением проводника. В случае тонкого и длинного проводника опыт дает формулу

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1.12)$$

где l — длина проводника, S — площадь его поперечного сечения, ρ — удельное сопротивление проводника, определяемое его материалом и температурой ($[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}$).

Выделим в проводнике малый элемент длиной dl (рис. 1.4) и применим к нему формулу (1.11), которую запишем в виде

$$I = \frac{dU}{dR},$$

где dU — напряжение на концах этого участка проводника, $dU = Edl$, E — напряженность поля в этом элементе, dR — сопротивление этого участка, равное

$$dR = \rho \frac{dl}{S}.$$

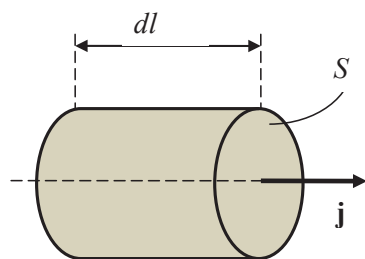


Рис. 1.4

Учтем, что $I = jS$, и получим

$$j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E \quad (1.13)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.14)$$

В этих выражениях, которые представляют собой *дифференциальную форму* закона Ома, величина $\sigma = 1/\rho$ называется *удельной электропроводностью* металла.

Удельное сопротивление ρ большинства металлов увеличивается с температурой T по закону, близкому к линейному, и в диапазоне не очень низких температур может быть описано выражением

$$\rho = \rho_0 + \alpha(T - T_0), \quad (1.15)$$

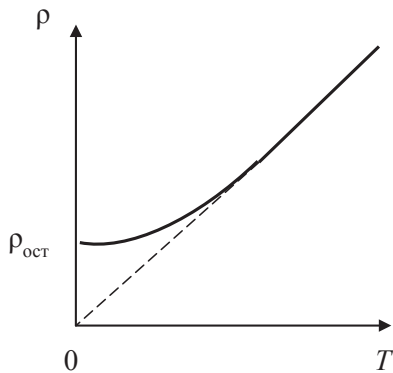


Рис. 1.5

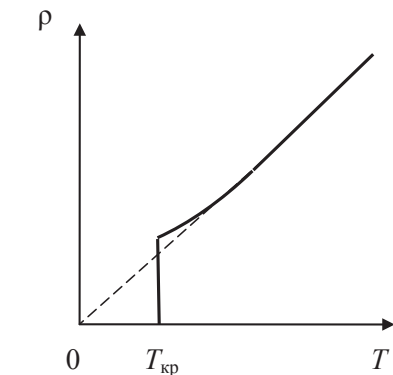


Рис. 1.6

в котором ρ_0 — удельное сопротивление при температуре T_0 , α — температурный коэффициент сопротивления (ТКС), определяемый материалом проводника.

Ситуация усложняется с понижением температуры (рис. 1.5). Усиливается влияние на удельное сопротивление примесей, искажений кристаллической решетки и механических напряжений, возникающих при деформации. Все это приводит к искажению линейной зависимости удельного сопротивления от температуры и существованию остаточного удельного сопротивления $\rho_{\text{ост}}$ при $T = 0$.

В начале XX века для ряда металлов было экспериментально обнаружено явление, получившее название *сверхпроводимость*. При достаточно низких температурах (речь идет о значениях в несколько кельвинов) сопротивление металла скачком обращается в нуль (рис. 1.16). Это происходит при темпера-

туре $T_{кр}$, которая называется *критической*. Значения критической температуры очень малы: например, для ртути $T_{кр} = 4,15$ К, для ниобия — 9,2 К. Наибольшее из известных значений $T_{кр}$ обнаружено у сплава Nb_3Ge и равно 23,2 К. Следует подчеркнуть, что сопротивление металла в сверхпроводящем состоянии не просто очень мало — оно *именно равно нулю*! Многочисленные точные эксперименты показали, что ток, протекающий в кольце, находящемся в сверхпроводящем состоянии, циркулирует не затухая в течение нескольких лет.

Явление сверхпроводимости носит чисто квантовый характер, и его удалось объяснить теоретически лишь полвека спустя. Сделали это Бардин, Купер и Шриффер в 1957 г. (теория БКШ). Согласно современным представлениям, между электронами в металле помимо кулоновского отталкивания существует своеобразное притяжение, в результате которого образуются так называемые *куперовские пары*. Придя в упорядоченное движение, они могут оставаться в этом состоянии сколь угодно долго.

Величина удельной электропроводности σ определяется типом вещества, его агрегатным состоянием и температурой и меняется в гигантских пределах. В зависимости от величины σ все вещества подразделяются на *проводники, полупроводники и диэлектрики*.

На рис. 1.7 изображены температурные зависимости меди, являющейся хорошим проводником, кремния, относящегося к классу полупроводников, и типичного диэлектрика — стекла. Видно, что при комнатных температурах отличие между удельной электропроводностью меди и кремния составляет пятнадцать порядков, а по сравнению со стеклом — двадцать!

Характерной особенностью металлов, а нас сейчас будут интересовать именно они, является то, что при температурах ниже температуры плавления возникает кристаллическая структура, образованная положительно заряженными ионами, в которой свободно движутся так на-

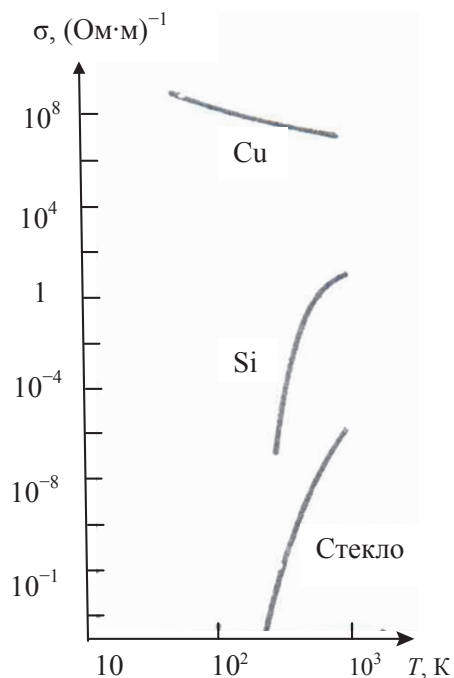


Рис. 1.7

зываемые коллективизированные электроны. Эта кристаллическая ионная решетка обладает удивительным свойством: она практически прозрачна для электронов проводимости, и поэтому металлы обладают столь высокой электропроводностью.

Подводя итог, отметим следующее. Закон Ома не относится к так называемым фундаментальным законам. Но, учитывая чрезвычайно широкую область его применимости, этот закон следует признать одним из наиболее важных в физике.

1.4. Сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Предположим, мы каким-то образом создали на концах проводника разность потенциалов φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 > \varphi_2$). Под действием электрического поля заряды в проводнике придут в движение, практически мгновенно выровняют значения этих потенциалов, и ток прекратится. Для того чтобы ток продолжал протекать, необходимо поддерживать

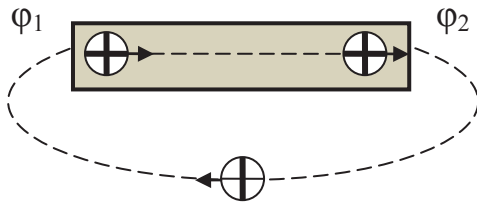


Рис. 1.8

разность потенциалов на концах проводника, а для этого нужно каким-либо способом переправлять носители тока (допустим, положительные) с правого конца проводника к его левому краю, имеющему более высокий потенциал (рис. 1.8). То есть *совершать*

работу против сил электрического поля. А для этого нужны силы неэлектростатического происхождения, которые называются *сторонними силами*. Природа этих сил может быть различна. Это могут быть силы, имеющие химическую природу (гальванические элементы), магнитные силы (генераторы тока) и т. д.

Участок цепи, на котором действуют сторонние силы, называют *источником тока*. Он характеризуется двумя параметрами — *электродвижущей силой* (ЭДС) ε и *внутренним сопротивлением* r .

Электродвижущей силой ε называют работу, которую совершают сторонние силы, по перемещению единичного положительного заряда внутри источника тока:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \quad (1.16)$$

Как следует из этой формулы, размерность ЭДС — вольт.

Сторонние силы, существующее в источнике тока, можно описать, введя *напряженность поля сторонних сил* \mathbf{E}^* . Поэтому действующую на заряд q стороннюю силу $\mathbf{F}_{\text{ст}}$ можно записать в виде

$$\mathbf{F}_{\text{ст}} = q\mathbf{E}^*,$$

и тогда работа A_{12} сторонних сил при перемещении заряда q по *неоднородному* участку цепи $1-2$, содержащему источник тока, будет равна

$$A_{12} = \int_{(1,2)} \mathbf{F}_{\text{ст}} d\mathbf{l} = q \int_{(1,2)} \mathbf{E}^* d\mathbf{l}.$$

Тогда ЭДС, действующая на этом участке, может быть представлена как

$$\varepsilon_{12} = \int_{(1,2)} \mathbf{E}^* d\mathbf{l}. \quad (1.17)$$

Если цепь замкнута, то это выражение принимает вид

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}^* d\mathbf{l}. \quad (1.18)$$

Наряду со сторонними, в цепи действует и сила $\mathbf{F}_{\text{эл}}$, созданная электростатическим полем с напряженностью \mathbf{E} и равная $\mathbf{F}_{\text{эл}} = q\mathbf{E}$. Следовательно, на заряд q будет действовать результирующая сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{эл}} + \mathbf{F}_{\text{ст}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

и ее работа по перемещению заряда по участку цепи $1-2$ будет равна

$$A_{12} = q \left(\int_{(1,2)} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{(1,2)} \mathbf{E}^* d\mathbf{l} \right) = q((\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}). \quad (1.19)$$

Падением напряжения U_{12} на участке цепи $1-2$ называется совершаемая сторонними и электростатическими силами работа по перемещению единичного положительного заряда на этом участке:

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (1.20)$$

Для однородного участка цепи ($\varepsilon_{12} = 0$)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

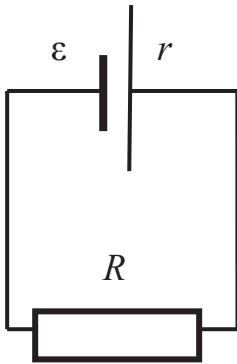


Рис. 1.9

падение напряжения на проводнике совпадает с разностью потенциалов на его концах, и закон Ома принимает вид (1.11).

В случае замкнутой цепи (рис. 1.9), содержащей источник тока, $\varphi_1 = \varphi_2$, и закон Ома обычно представляют в форме

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (1.21)$$

разделяя в знаменателе этого выражения сопротивление R внешнего участка цепи, на котором не действуют сторонние силы, и внутреннее сопротивление r источника. В таком виде это выражение называют *законом Ома для полной цепи*.

1.5. Классическая теория электропроводности. Закон Ома

Основы теории электропроводности металлов заложил немецкий физик П. Друде, а дополнил и развил Х. А. Лоренц. Они исходили из предположения, что свободные электроны в металле подчиняются законам идеальных газов. Отличие заключалось лишь в том, что учитывались столкновения электронов не друг с другом, а с ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. В промежутках между ними электроны двигаются свободно, и средняя длина λ их свободного пробега равна периоду кристаллической решетки металла. При этом средняя скорость их теплового движения определяется известной формулой

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (1.22)$$

которая при комнатной температуре дает оценочное значение $\langle v \rangle \approx 10^5$ м/с.

Наличие в проводнике электрического поля приводит к тому, что у хаотического теплового движения электронов появляется упорядоченная составляющая, имеющая среднюю скорость $\langle u \rangle$, определяемую формулой (1.6). Эта скорость невелика: ее величина не превышает 10^{-3} м/с.

Оценим величину избыточной кинетической энергии электронов, обусловленной этим упорядоченным движением. Рассмотрим для этого среднее значение квадрата результирующей скорости электронов:

$$\langle (\mathbf{v} + \mathbf{u})^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + 2\langle \mathbf{vu} \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \langle \mathbf{v}^2 \rangle + \langle \mathbf{u}^2 \rangle. \quad (1.23)$$

В этих расчетах мы учли, что скорости \mathbf{v} и \mathbf{u} являются независимыми величинами, и поэтому по теореме об умножении вероятностей

$$\langle \mathbf{vu} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle,$$

поскольку $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$.

Таким образом, упорядоченное движение электронов увеличивает их среднюю кинетическую энергию на величину

$$\Delta \varepsilon_k = \frac{m \langle u^2 \rangle}{2}. \quad (1.24)$$

Согласно модели Друде — Лоренца эту избыточную энергию электрон полностью передает иону решетки при столкновении, и его скорость u упорядоченного движения обращается в нуль. Затем процесс повторяется. Между столкновениями электрон движется с постоянным ускорением

$$a = \frac{eE}{m},$$

и его скорость u меняется со временем по закону

$$u = at = \frac{eE}{m} t.$$

Время τ , разделяющее два последовательных соударения, равно

$$\tau = \frac{\lambda}{|\mathbf{v} + \mathbf{u}|} \approx \frac{\lambda}{|\mathbf{v}|} = \frac{\lambda}{v},$$

Поэтому максимальное значение скорости

$$u_{\max} = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE\lambda}{mv}, \quad (1.25)$$

и скорость u упорядоченного движения электрона изменяется со временем так, как показано на рис. 1.10. Ее среднее значение составляет половину максимального:

$$\langle u \rangle = \frac{eE\lambda}{2mv}, \quad (1.26)$$

и тогда выражение (1.6) принимает вид

$$j = en\langle u \rangle = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E. \quad (1.27)$$

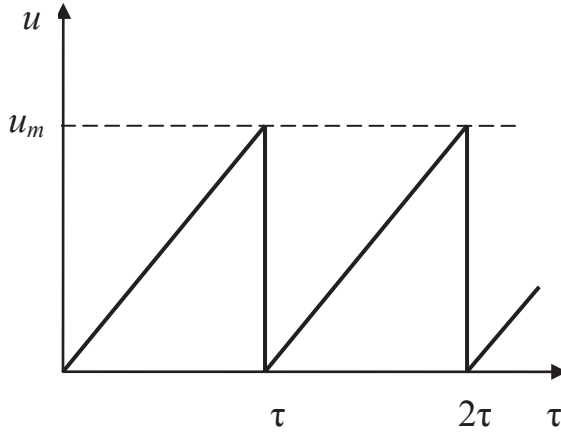


Рис. 1.10

Эта формула есть не что иное, как дифференциальная форма закона Ома (1.13), в которой

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (1.26)$$

Итак, согласно классической теории, сопротивление металлов обусловлено столкновениями электронов с ионами, образующими кристаллическую решетку. Но, как оказалось, это объяснение носит лишь качественный характер. Затруднения возникли при описании температурной зависимости удельного сопротивления ρ . Согласно формулам (1.15), (1.22) и (1.29)

$$\rho = \sigma^{-1} \sim v \sim \sqrt{T},$$

тогда как эксперимент приводит к линейной зависимости удельного сопротивления от температуры (см. формулу (1.15)). Эти противоречия были сняты лишь много лет спустя, после создания квантовой теории.

Задачи к главе 1

Задача 1.1. Бесконечная цепь, ограниченная точками A и B , состоит из повторяющихся звеньев, образованных резисторами $R_1 = 4,0$ Ом и $R_2 = 3,0$ Ом (рис. 1.11). Чему равно ее сопротивление R ?

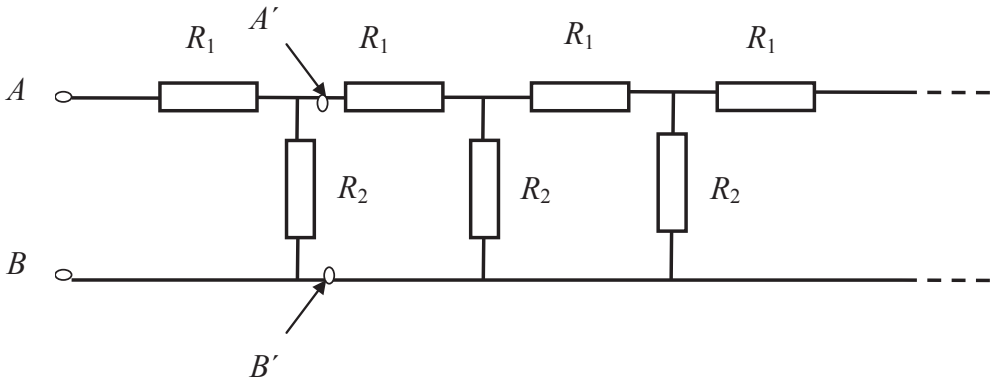


Рис. 1.11

Решение. Особенность этой цепи заключается в том, что она бесконечна. А это значит, что если мы удалим, допустим, первое звено, то сопротивление оставшейся цепи, ограниченной точками A' и B' , не изменится и будет также равно R . Поэтому данную цепь можно изобразить при помощи так называемой эквивалентной схемы, изображенной на рис. 1.12.

Ее сопротивление легко вычислить:

$$R = R_1 + \frac{R_2}{R_2 + R},$$

$$(R - R_1)(R_2 + R) = R_2 R,$$

$$R^2 - R R_1 - R_1 R_2 = 0,$$

$$R = \frac{R_1}{2} + \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2} = 6 \text{ Ом}.$$

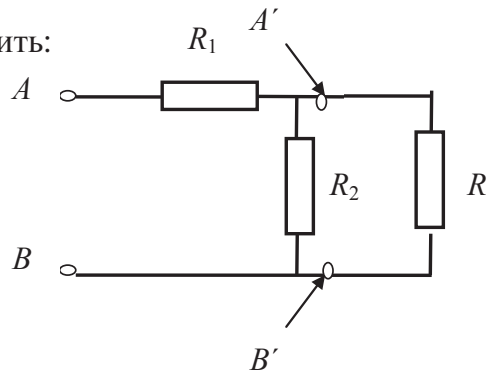


Рис. 1.12

Задача 1.2. Безграничная сетка, сделанная из проволоки, имеет квадратные ячейки (рис. 1.13). Сопротивление участка проволоки, сое-

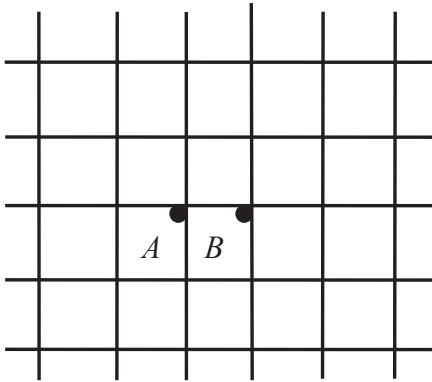


Рис. 1.13

диняющей соседние узлы, равно R_0 . Чему равно сопротивление R между узлами A и B этой цепи?

Решение. Возьмем условный источник тока, на клеммах которого поддерживается напряжение U , и подключим его к узлам A и B (допустим, узел A соединен с положительной клеммой). По закону Ома мы можем записать два очевидных равенства:

$$U = IR,$$

$$U = I_0 R_0,$$

в которых I — суммарный ток, идущий от источника, R — сопротивление сетки, а I_0 — ток, протекающий по проволочной перемычке, соединяющей узлы A и B . Ток I в узле A делится, течет по четырем одинаковым перемычкам и далее растекается в бесконечность, поэтому $I_0 = I/4$. Аналогично протекает и обратный процесс — ток из бесконечности «втекает» в узел B с одновременным выполнением того же условия $I_0 = I/4$. Таким образом, согласно принципу суперпозиции $I_0 = I/2$, и тогда $R = R_0/2$.

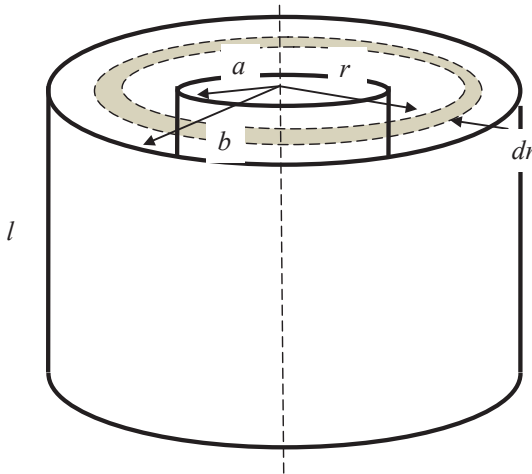


Рис. 1.14

Задача 1.3. Пространство между двумя проводящими коаксиальными цилиндрами заполнено слабо проводящей средой, удельное сопротивление которой равно ρ (рис. 1.14). Длина цилиндров l , а их радиусы равны a и b ($a < b$). Найти сопротивление этой цепи.

Решение. Разобьем пространство между цилиндрами на множество бесконечно тонких цилиндрических сло-

ев и выберем один из них — радиусом r и толщиной dr . Линии тока перпендикулярны этому слою во всех его точках, и поэтому его сопротивление можно записать в виде

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r l}.$$

Проинтегрировав это выражение, мы получим ответ:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{b}{a}.$$

Задача 1.4. В центре тонкой металлической сферы радиуса b находится металлический шар радиуса a . Пространство между ними заполнено слабо проводящей средой, удельное сопротивление которой равно ρ (рис. 1.15). Найти сопротивление этой цепи. Рассмотреть случай $b \rightarrow \infty$.

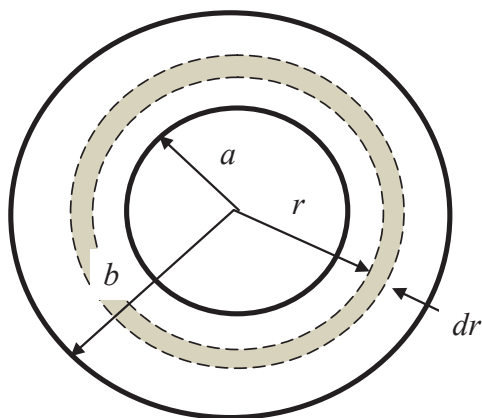


Рис. 1.15

Решение. Решение этой задачи подобно рассмотренному выше. Отличие заключается лишь в том, что пространство между электродами представляет собой шаровой слой, который можно разбить на множество бесконечно тонких шаровых слоев радиусом r и толщиной dr каждый. Сопротивление dR такого слоя равно

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2},$$

и тогда

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

При $b \rightarrow \infty$

$$R = \frac{\rho}{4\pi a}.$$

Задача 1.5. В слабо проводящей однородной среде находятся два одинаковых шарика радиуса a (рис. 1.16). Чему равно сопротивление этой цепи, если расстояние между шариками много больше их радиусов? Удельное сопротивление среды равно ρ .

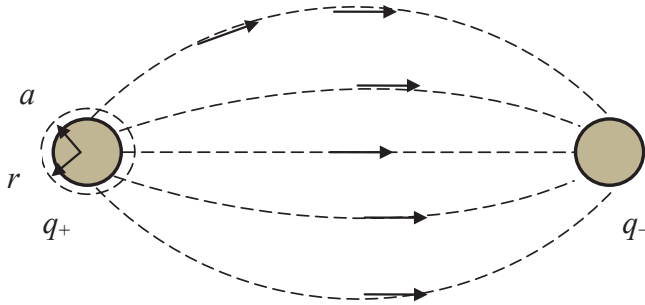


Рис. 1.16

Решение. Сообщим шарикам заряды q_+ и q_- . При этом их потенциалы запишутся как

$$\varphi_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_+}{a}, \quad \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_-}{a},$$

и разность потенциалов между ними будет равна

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_+}{a}.$$

Для того чтобы найти ток, протекающий в этой цепи, выберем замкнутую поверхность, охватывающую один из шариков, заряженный, допустим, положительно. Заряд, протекающий через эту поверхность в единицу времени, согласно уравнению непрерывности, не зависит от ее формы, поэтому мы выберем ее в виде сферы радиуса r ($r \approx a$), «прилегающей» к поверхности шарика (рис. 1.14). Тогда

$$I = jS = \frac{1}{\rho} E 4\pi a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_+}{a^2} 4\pi a^2 = \frac{q_+}{\rho\epsilon_0}.$$

Поясним проделанные преобразования: согласно дифференциальной форме закона Ома (см. формулу (1.14)) плотность тока j связана с напряженностью электрического поля E соотношением $j = E/\rho$, а напряженность поля точечного заряда при $r = a$ определяется формулой

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}.$$

Воспользуемся законом Ома в интегральной форме (1.11) и получим ответ:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi a}.$$

Любопытно, что сопротивление такой цепи не зависит от расстояния между шариками.

Задача 1.6. Удельное сопротивление длинного проводника, имеющего круглое сечение, описывается формулой $\rho = \alpha/r^2$, в которой r — расстояние от оси проводника. В проводнике протекает ток I . Найти:

- величину напряженности поля в проводнике;
- сопротивление R_l проводника в расчете на единицу его длины.

Решение. Согласно дифференциальной форме закона Ома (см. формулу (1.14)) вектор плотности тока \mathbf{j} связан с напряженностью электрического поля \mathbf{E} соотношением

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E},$$

поэтому ток через поперечное сечение такого проводника будет равен

$$I = \int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int \frac{1}{\rho} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \frac{1}{\rho} E dS = \int_0^a \frac{r^2}{\alpha} E 2\pi r dr = \frac{2\pi E}{\alpha} \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi E a^4}{2\alpha}.$$

Отсюда

$$E = \frac{2I\alpha}{\pi a^4}.$$

Сопротивление R_l найдем легко:

$$R_l = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} = |l=1| = \frac{E}{I} = \frac{2\alpha}{\pi a^4}.$$

Замечание. Вычисляя ток в проводнике, мы вынесли модуль напряженности E электрического поля за знак интеграла, предполагая, что напряженность одинакова во всех точках сечения проводника. А если нет? В качестве обоснования сделанного можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \mathbf{E} , применив ее для прямоугольного контура, изображенного на рис. 1.17:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{(1,2)} E_1 dl + \int_{(3,4)} E_2 dl = (E_1 - E_2)l = 0,$$

$$E_1 = E_2.$$

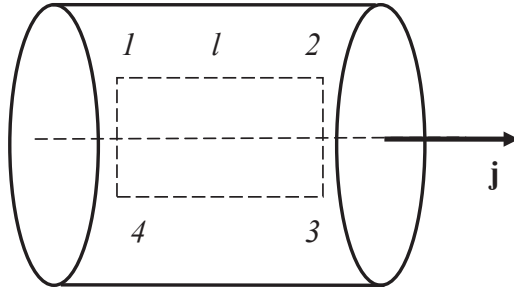


Рис. 1.17

Здесь мы предположили, что на участке 1–2 напряженность поля равна E_1 , а на участке 3–4 — E_2 . Они оказываются равными, поскольку интегралы на участках 2–3 и 4–1 обращаются в нуль вследствие ортогональности векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$.

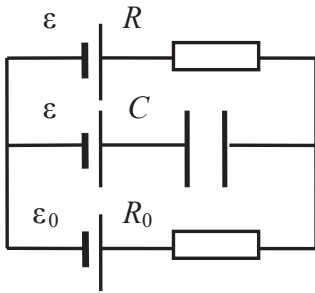


Рис. 1.18

Задача 1.7. На рис. 1.18 изображена цепь, содержащая три источника тока, внутренним сопротивлением которых можно пренебречь. Чему равна величина зарядов на обкладках конденсатора?

Решение. Рассмотрим верхний участок цепи, включающий в себя сопротивление R , конденсатор C и два одинаковых источника ε . В соответствии с законом Ома для неоднородного участка цепи разность потенциалов точек 1 и 2 можно представить как

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon + IR,$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varepsilon + \Delta\varphi,$$

$$\Delta\varphi = IR,$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов обкладок конденсатора.

.....

Ток I протекает по внешнему контуру этой цепи и его можно найти по закону Ома:

$$I(R + R_0) = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{R + R_0}.$$

Заряд q на обкладках конденсатора определяется по формуле

$$q = C\Delta\varphi = CRI = \frac{CR(\varepsilon - \varepsilon_0)}{R + R_0}.$$

Глава 2.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

2.1. Взаимодействие токов. Магнитное поле

Опыт показывает, что между проводниками, по которым протекает ток, существует взаимодействие. Так, параллельные токи одного направления притягиваются друг к другу, а противоположного — отталкиваются (рис. 2.1). Фарадей установил, что силы, с которыми взаимодействуют такие проводники в расчете на единицу длины, равны

$$F_{\text{ед}} = k^* \frac{2I_1 I_2}{r}, \quad (2.1)$$

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{l}, \quad F = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|,$$

где $k^* = 10^{-7} \text{ Н/А}^2$, l — длина проводника (речь идет о длинных проводниках).

Обычно коэффициент k^* записывают в виде

$$k^* = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \mu_0 = 4\pi k^* = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2, \quad (2.2)$$

где μ_0 называют *магнитной постоянной* и обычно используют с размерностью $[\mu_0] = \text{Г/м}$, эквивалентной приведенной выше.

Если вспомнить аналогичный коэффициент $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$, используемый в электростатике, то

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2} = \frac{1}{(3 \cdot 10^8 \text{ м/с})^2} = \frac{1}{c^2}, \quad (2.3)$$

где c — скорость света в вакууме. Это полезное соотношение пригодится нам в дальнейшем.

Для описания взаимодействия токов воспользуемся понятием *магнитного поля*, введенным еще в начале XIX века Эрстедом. Согласно современным представлениям, *магнитное поле порождается движущимися зарядами (токами) и действует на движущиеся заряды (токи)*. Для описания силового воздействия этого поля на токи и движущиеся заряды используется векторная величина \mathbf{B} , получившая название *индукции магнитного поля* или *магнитной индукции*.

Графически магнитное поле изображается при помощи *линий магнитной индукции*, или *силовых линий*, которые *всегда замкнуты*. Этим они отличаются от линий напряженности электрического поля, которые начинаются и заканчиваются на зарядах (или в бесконечности). Направление линий магнитной индукции определяется простым правилом, получившим название *правила буравчика* (или *правого винта*): при поступательном движении буравчика в направлении распространения тока его рукоятка, вращающаяся по часовой стрелке, указывает направление силовых линий. На рис. 2.2 изображены линии магнитной индукции поля, созданного прямым током. Для кольцевых токов удобно применять *правило правой руки*: если согнутые пальцы правой руки совпадают с направлением кольцевого тока, то отогнутый вверх большой палец указывает направление поля в центре этого витка. Вид соответствующих силовых линий поля кольцевого тока изображен на рис. 2.3. Вектор \mathbf{B} направлен по касательной к силовой линии в каждой точке поля.

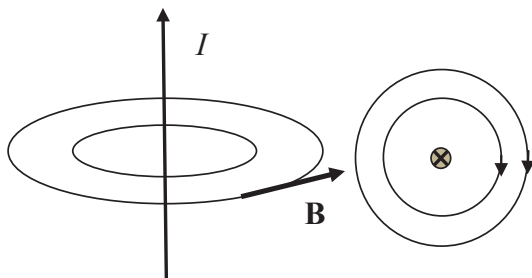


Рис. 2.2

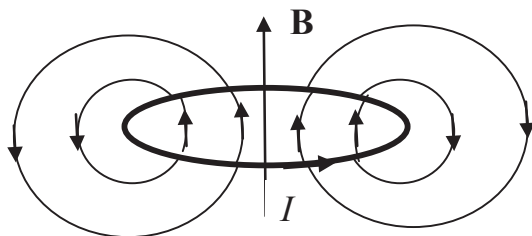


Рис. 2.3

Для магнитного поля справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому поле, созданное системой токов, равно векторной сумме полей, порожденных каждым током в отдельности.

2.2. Закон Био — Савара — Лапласа. Расчет магнитных полей

В 1820 г. французские физики Био и Савар изучали топографию магнитных полей, созданных токами различной конфигурации. Для

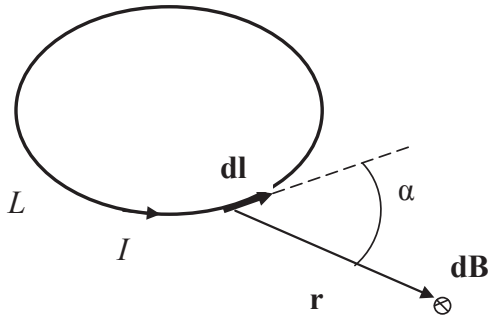


Рис. 2.4

описания полученных результатов Лаплас предложил следующее. Цепь, по которой протекает ток, разобьем на множество бесконечно малых элементов $d\mathbf{l}$, каждый из которых создает свое бесконечно слабое поле $d\mathbf{B}$ в точке наблюдения P (рис. 2.4). Результирующее поле \mathbf{B} в этой точке определится как результат сложения векторов $d\mathbf{B}$. Вслед

за Лапласом назовем произведение $I d\mathbf{l}$ *элементом тока*, который создает в точке P магнитное поле с индукцией

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [\mathbf{dl} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}. \quad (2.4)$$

Согласно свойствам векторного произведения вектор $d\mathbf{B}$ перпендикулярен векторам $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} , поэтому на рис. 2.4 он направлен перпендикулярно плоскости чертежа, что вполне согласуется с правилом буравчика.

Для нахождения результирующего вектора \mathbf{B} необходимо вычислить интеграл

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0 I [\mathbf{dl} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}. \quad (2.5)$$

Формулы (2.4) и (2.5) являются математическим выражением *закона Био — Савара — Лапласа* (коротко — закон БСЛ) в дифференциальной и интегральной форме соответственно.

В скалярном виде выражение (2.4) принимает вид

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (2.6)$$

Замечание. Закон БСЛ и, соответственно, формулы (2.4) и (2.5) справедливы только для *постоянных токов*, а они всегда замкнуты. Пред-

положим, мы добавили в правую часть равенства (2.4) некий член, циркуляция которого по контуру L равна нулю. Его наличие никоим образом не изменило бы значения реально наблюдаемых величин. Это означает, что закон БСЛ в дифференциальном виде *принципиально* не поддается экспериментальной проверке — мы не можем выделить и изолировать какой-либо элемент тока и экспериментировать с ним. Опытным путем мы можем подтвердить лишь закон БСЛ в интегральной форме — формулу (2.5).

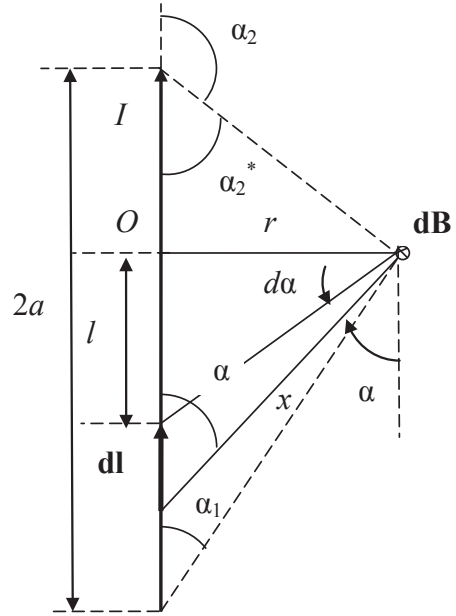


Рис. 2.5

В качестве примера вычислим индукцию поля, созданного прямолинейным участком цепи длиной $2a$ в точке P , отстоящей от него на расстояние r . Положение этой точки определим углами α_1 и α_2 (рис. 2.5).

Элемент тока $I dl$ создает в точке P поле, индукция dB которого направлена перпендикулярно плоскости чертежа. Ее модуль равен

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi x^2}.$$

Выразим все величины, входящие в это выражение, через расстояние r и угловую переменную α :

$$x = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad l = r \cot \alpha, \quad dl = \left| -\frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} \right| = \frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Знак «минус» в последней формуле роли не играет: он лишь указывает на то, что при увеличении l угол α уменьшается и наоборот.

Итак,

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi r},$$

и, проинтегрировав это выражение, мы получим ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2^*). \quad (2.7)$$

Рассмотрим несколько важных частных случаев.

1. Точка O , являющаяся проекцией точки наблюдения P , находится в центре прямолинейного участка проводника: $\alpha_2^* = \alpha_1$. В этом случае

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1. \quad (2.8)$$

2. Проводник бесконечно длинный: $\alpha_1 = 0$. Тогда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2.9)$$

3. Точка O находится на краю полубесконечного проводника: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2^* = \pi/2$. В этом случае

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}. \quad (2.10)$$

Во всех рассмотренных случаях вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости чертежа.

2.3. Магнитное поле движущегося заряда

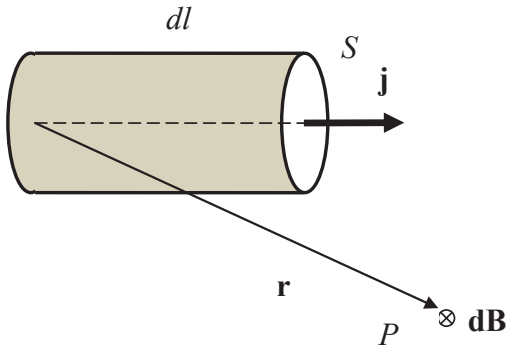


Рис. 2.6

Тогда

Рассмотрим поле, созданное элементом тока $I d\mathbf{l}$ в точке наблюдения P (рис. 2.6)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [\mathbf{dl} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}$$

и проведем ряд преобразований:

$$I d\mathbf{l} = j S d\mathbf{l} = j S dl = j dV,$$

где dV — объем выделенного элемента цепи.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 [\mathbf{j} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} dV.$$

Плотность тока связана с концентрацией n носителей и скоростью $\langle \mathbf{u} \rangle$ их упорядоченного движения формулой (1.7):

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{u} \rangle,$$

поэтому

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e [\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} n dV = \frac{\mu_0 e [\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3} dN,$$

где dN — число носителей тока в данном элементе цепи.

Таким образом, индукция \mathbf{B} поля, созданного одним носителем тока, движущимся со скоростью $\langle \mathbf{u} \rangle$ определится выражением

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0 e [\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}. \quad (2.11)$$

Полученный результат легко обобщить: заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} , создает в точке наблюдения P поле

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{4\pi r^3}. \quad (2.12)$$

В скалярном виде это выражение запишется так:

$$B = \frac{\mu_0 q v \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (2.13)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что прямолинейно движущийся заряд не создает поле в точках, лежащих на траектории его движения.

Замечание. Поле движущегося заряда *всегда* может быть измерено экспериментально, хотя эта задача не из легких. В этом заключается принципиальное отличие формул (2.4) и (2.13). Возможно, было бы логичнее положить в основу теории стационарного магнитного поля закон (2.12), а не закон БСЛ, но исторически возобладали подход, изложенный выше.

2.4. Магнитное поле: основные законы

Магнитное поле, как и поле электрическое, обладает рядом важных свойств, являющихся следствием основных законов магнитного поля. Первый из них — *теорема Гаусса для вектора \mathbf{B}* : *поток векто-*

ра магнитной индукции \mathbf{B} через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (2.14)$$

Эта формула является математическим выражением известного факта о том, что линии магнитной индукции всегда замкнуты. Поэтому количество силовых линий, вошедших в объем, ограниченный некоторой замкнутой поверхностью, будет равно количеству линий, вышедших из него. По сути, эта особенность линий магнитной индукции указывает на то, что в природе отсутствуют источники магнитного поля типа «магнитных зарядов».

История магнитных зарядов весьма интересна. Впервые идею об их существовании высказал П. А. М. Дирак в 30-х гг. прошлого века. Он назвал их *магнитными монополями*. Это *гипотетические* частицы, обладающие магнитным зарядом. Такой монополю противоречит нашим классическим представлениям: ведь если взять магнит и разрезать его на две части, то мы вновь получим два новых магнита. Используя законы квантовой физики, Дираку удалось оценить возможную массу и магнитный заряд такой частицы.

Попытки экспериментально обнаружить монополи Дирака ведутся постоянно, особенно интенсивно — в космических лучах. В последние годы для этих целей используется Большой адронный коллайдер (БАД), однако следов монополей пока не обнаружено.

Применим к выражению (2.14) теорему Остроградского — Гаусса и получим равенство

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (2.15)$$

которое представляет собой формулировку теоремы Гаусса для вектора \mathbf{B} в дифференциальном виде.

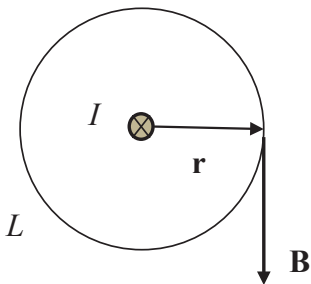


Рис. 2.7

Мы знаем из электростатики, что циркуляция вектора \mathbf{E} напряженности электрического поля по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

что является признаком потенциальности этого поля.

А как обстоит дело с магнитным полем? Начнем с простейшего случая: рассмотрим

поле прямого тока I , а в качестве контура L возьмем окружность радиуса r , лежащую в плоскости, перпендикулярной этому току, с центром на его оси (рис. 2.7).

Выбранный контур совпадает с одной из линий магнитной индукции, и поэтому в каждой его точке вектора \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$ будут сонаправлены. Таким образом,

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_L dl = \mu_0 I.$$

Усложним задачу и возьмем контур произвольной формы (рис. 2.8):

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{da}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{rd\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\theta = \mu_0 I.$$

Мы получили тот же результат. Оказалось, что от формы контура он не зависит.

Рассмотрим третий случай: контур L не охватывает проводник с током (рис. 2.9). Цепочка вычислений на начальных этапах такая же:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos \alpha = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{da}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{rd\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\theta,$$

но затем ситуация изменяется:

$$\oint_L d\theta = \int_{1a2} d\theta + \int_{2b1} d\theta = \Delta\theta - \Delta\theta = 0.$$

Таким образом, в этом случае

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = 0.$$

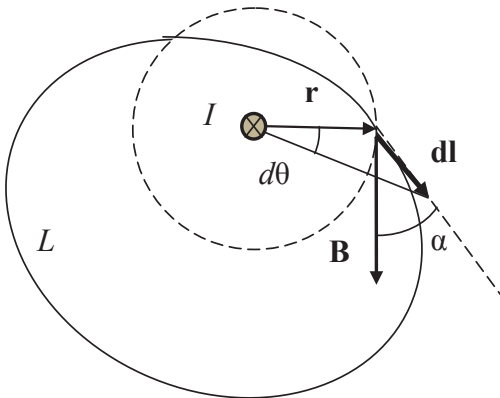


Рис. 2.8

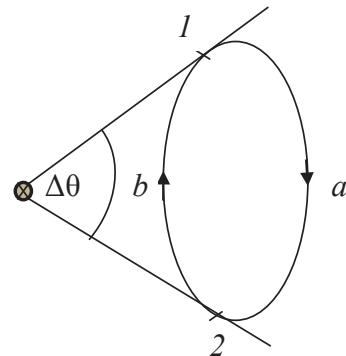


Рис. 2.9

Мы доказали очень важную теорему — *теорему о циркуляции вектора \mathbf{B}* : циркуляция вектора магнитной индукции \mathbf{B} по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов I_Σ , охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0 :

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_\Sigma. \quad (2.16)$$

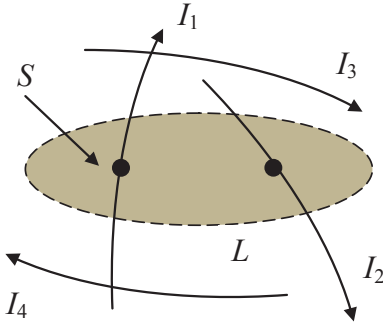


Рис. 2.10

Замечание. Магнитное поле в месте расположения контура создается, конечно, *всеми токами*, находящимися поблизости, но вклад в *циркуляцию* этого поля по замкнутому контуру вносят только те поля, которые порождаются токами, *пронизывающими* поверхность, «натянутую» на этот контур.

В качестве примера рассмотрим систему токов (рис. 2.10), создающих в пространстве некое магнитное поле \mathbf{B} . Его циркуляция по контуру L будет равна

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_\Sigma = \mu_0 (I_1 + I_2).$$

В случае непрерывного распределения токов в пространстве

$$I_\Sigma = \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

и тогда равенство (2.16) принимает вид

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

где \mathbf{j} — вектор плотности тока.

Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\int_{(S)} [\nabla \times \mathbf{B}] d\mathbf{S} = \mu_0 \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

получим равенство

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (2.17)$$

которое представляет собой дифференциальную форму записи теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} — еще одного фундаментального закона магнитного поля.

2.5. Поле соленоида

Соленоид представляет собой катушку, длина которой много больше ее диаметра. На катушку плотно намотан тонкий провод, поэтому каждый его виток можно считать кольцевым током. При пропускании по соленоиду постоянного тока возникает магнитное поле, которое представляет собой суперпозицию полей отдельных витков (рис. 2.11), в результате чего продольные составляющие поля будут складываться, а поперечные — компенсировать друг друга (рис. 2.12).

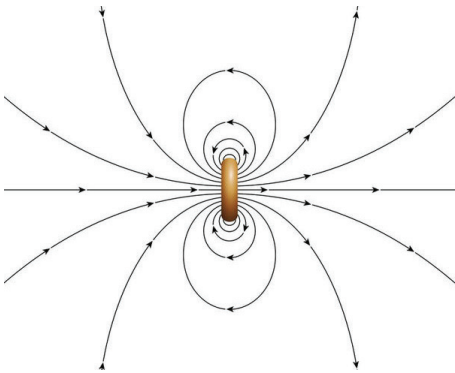


Рис. 2.11

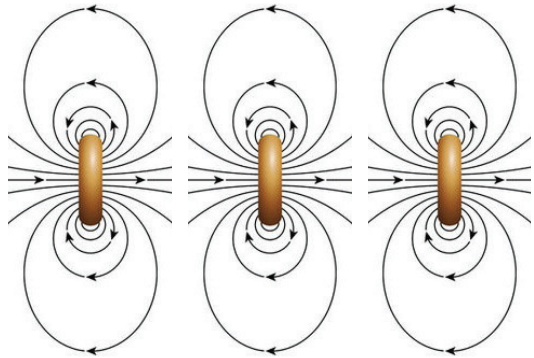


Рис. 2.12

В результате такого наложения силовые линии поля соленоида конечной длины приобретают вид, изображенный на рис. 2.13.

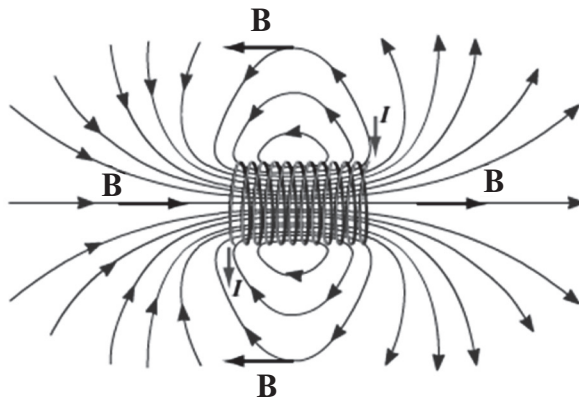


Рис. 2.13

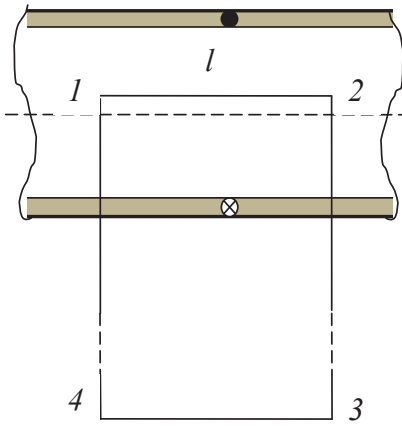


Рис. 2.14

При увеличении длины соленоида (в пределе — до бесконечности) индукцию поля можно рассчитать с использованием теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} . Делается это так. Выберем контур L в виде прямоугольника, одна из сторон которого длиной l находится внутри соленоида и параллельна его оси (рис. 2.14). Стороны 2–3 и 4–1 являются бесконечно длинными, так что участок 3–4 находится на бесконечном удалении от соленоида.

Согласно формуле (2.16)

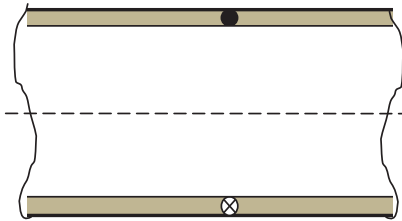
$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_\Sigma,$$

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{(1,2)} B dl + \int_{(2,3)} B dl + \int_{(3,4)} B dl + \int_{(4,1)} B dl = \int_{(1,2)} B dl = Bl.$$

Поясним проделанное. Поскольку вектор \mathbf{B} направлен вдоль оси соленоида, то на участках 2–3 и 4–1 скалярное произведение $\mathbf{B} d\mathbf{l} = 0$. Участок 3–4 бесконечно удален — логично считать, что в этом случае $\mathbf{B} = 0$. Наконец, на участке 1–2 векторы \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$ сонаправлены.

Пусть по обмотке соленоида протекает ток I . Тогда ток I_Σ , охватываемый этим контуром, будет равен

$$I_\Sigma = Inl,$$



где n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Таким образом, магнитная индукция B внутри соленоида равна

$$B = \mu_0 nI. \quad (2.18)$$

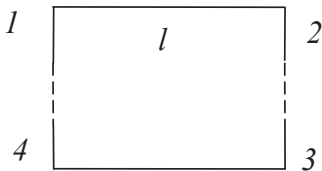


Рис. 2.15

Поле вне соленоида определим точно так же, но для этого сторону контура 1–2 переместим за обмотку соленоида (рис. 2.15). Расчет циркуляции вектора \mathbf{B} даст аналогичный результат:

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = -Bl,$$

но теперь контур не охватывает никаких токов, то есть $I_\Sigma = 0$. Поэтому вне соленоида поле отсутствует

$$B_{\text{вне}} = 0. \quad (2.19)$$

Итак, поле бесконечно длинного соленоида локализовано в его объеме, направлено вдоль его оси и является однородным — величина и направление вектора \mathbf{B} одинаковы во всех точках.

Для соленоида конечной длины l ситуация усложняется: вблизи торцов поле становится неоднородным (рис. 2.16). Значение поля на торцах такого соленоида оказывается в два раза меньше, чем в его центре.

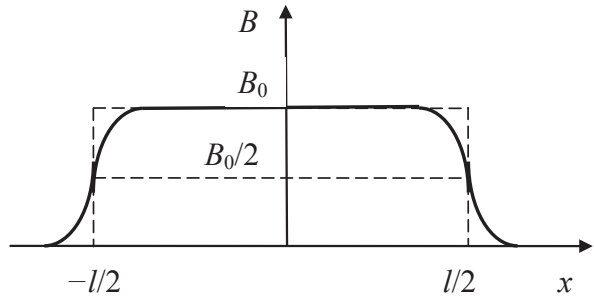


Рис. 2.16

К этому результату легко прийти следующим образом: возьмем два одинаковых соленоида с одинаковыми токами и последовательно соединим их, плотно прижав друг к другу два торца. Образуется соленоид, поле которого в месте соединения будет равно B_0 и при этом равно удвоенному значению индукции поля на торце соленоида.

2.6. Сила Лоренца

Опыт показывает, что на заряд q , движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B , действует сила — *сила Лоренца*, величина которой определяется скалярной формулой

$$F_{\text{л}} = qvB \sin \alpha, \quad (2.20)$$

где α — угол между направлением движения заряда и вектором \mathbf{B} .

В векторной записи это выражение принимает вид

$$\mathbf{F}_{\text{л}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (2.21)$$

Эта формула указывает направление силы Лоренца, которое также можно определить по известному *правилу левой руки*: если пальцы ле-

вой руки направлены по движению заряда, а линии магнитной индукции входят в ладонь, то отогнутый большой палец указывает направление силы Лоренца. Речь здесь идет о положительном заряде. Для отрицательного направление силы изменится на противоположное.

Из этих формул следует, что сила Лоренца *не действует* на покоящиеся заряды, а также на заряды, движущиеся вдоль силовой линии.

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_L,$$

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

умножим левую и правую части этого уравнения на вектор \mathbf{v} :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \mathbf{v} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{v}] \mathbf{B} = 0.$$

Поэтому

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} = m \frac{dv^2}{2dt} = 0,$$

$$v^2 = \text{const.} \quad (2.22)$$

Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно направлению движения заряда, поэтому ее работа равна нулю, то есть она *не меняет* кинетическую энергию заряда, а значит, и модуль его скорости. Эта сила изменяет лишь направление вектора скорости, играя роль центростремительной силы, сообщая заряду центростремительное (нормальное) ускорение.

Рассмотрим ряд конкретных ситуаций.

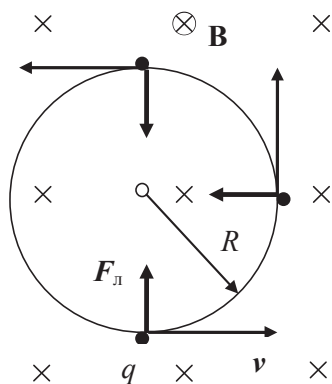


Рис. 2.17

1. Заряд q , влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} перпендикулярно его силовым линиям (рис. 2.17). По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}_n = \mathbf{F}_L,$$

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \sin 90^\circ,$$

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (2.23)$$

Из этой формулы следует, что заряд будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции \mathbf{B} , и при увеличении скорости заряженной частицы радиус R этой окружности (*циклотронный радиус*) будет возрастать.

Период T обращения частицы в магнитном поле найдем из соотношения

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.24)$$

Частота ω обращения при этом будет равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}. \quad (2.25)$$

Ее называют *циклотронной частотой*.

Мы получили интересный результат: период обращения *не зависит* от скорости движения заряда.

2. Заряд q влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} под углом $\alpha \neq 90^\circ$ к его силовым линиям (рис. 2.18).

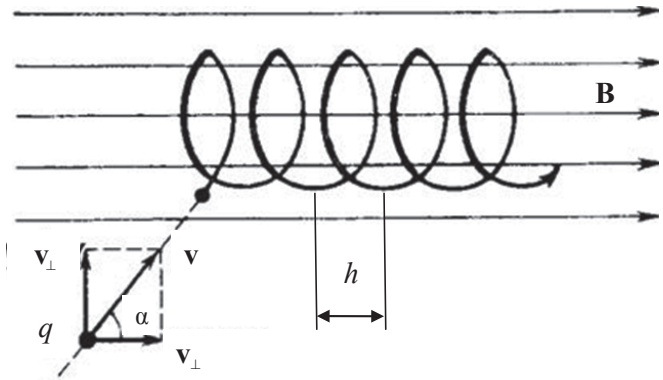


Рис. 2.18

В этом случае вектор скорости \mathbf{v} можно разложить на две составляющих:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel, \quad (2.26)$$

и тогда выражение для силы Лоренца принимает вид

$$\mathbf{F}_\text{л} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = q[(\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) \times \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}]. \quad (2.27)$$

Эта сила лежит в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции, поэтому продольная составляющая скорости v_{\parallel} не меняется, и траектория движения частицы представляет собой спираль, ось которой совпадает по направлению с вектором \mathbf{B} . Эта спираль имеет постоянный шаг h , равный

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \alpha T = v \cos \alpha \frac{2\pi m}{qB}. \quad (2.28)$$

В плоскости, перпендикулярной направлению поля, движение заряда представляет собой окружность, радиус R которой определяется величиной поперечной составляющей скорости v_{\perp} заряженной частицы

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv}{qB} \sin \alpha. \quad (2.29)$$

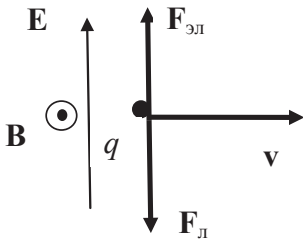


Рис. 2.19

3. Заряд q влетает в скрещенные электрическое и магнитное поля перпендикулярно их силовым линиям (рис. 2.19). Определим условие, при котором он будет двигаться равномерно и прямолинейно. Это произойдет в случае, когда

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{л}} + \mathbf{F}_{\text{эл}} &= 0, \\ F_{\text{л}} &= F_{\text{эл}}, \\ qvB \sin \pi/2 &= qE, \\ v &= \frac{E}{B}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Это любопытный результат: любые заряженные частицы будут двигаться в этих полях равномерно и прямолинейно независимо от их заряда и массы, если их скорость будет соответствовать условию (2.28). Этим пользуются для получения моноскоростных пучков ионов в масс-спектрометрах.

2.7. Движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле

Неоднородность магнитного поля существенно усложняет задачу и приводит к появлению ряда новых эффектов. Рассмотрим их.

Пусть частица влетает в неоднородное магнитное поле, индукция \mathbf{B} которого изменяется по величине в направлении оси z . На рис. 2.20, *a* «густота» силовых линий убывает в этом направлении, что указывает на уменьшение магнитной индукции.

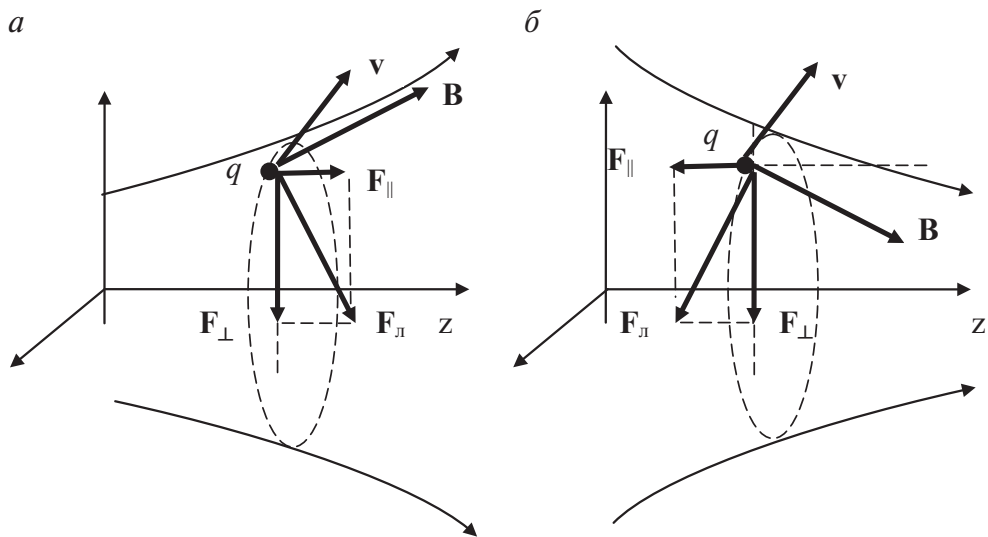


Рис. 2.20

Сила Лоренца перпендикулярна вектору магнитной индукции в месте нахождения заряда, и у вектора \mathbf{F}_\perp появляется продольная составляющая \mathbf{F}_\parallel , под действием которой увеличивается продольная составляющая скорости \mathbf{v}_\parallel и, соответственно, шаг спирали.

На рис. 2.20, *б* изображена обратная ситуация: магнитная индукция возрастает с увеличением координаты z , что приводит к появлению составляющей \mathbf{F}_\parallel , направленной в противоположную сторону. При этом возможен случай, когда продольная составляющая скорости \mathbf{v}_\parallel обратится в нуль, а затем изменит свое направление — возникает эффект *магнитного зеркала*. Это явление применяется в устройствах, получивших название *магнитных ловушек* и предназначенных для удержания заряженных частиц плазмы в небольшой пространственной области.

Примером такой ловушки может служить «магнитная бутылка», изображенная на рис. 2.21, два горлышка которой играют роль магнитных пробок — магнитных зеркал, создаваемых неоднородным полем двух сильных кольцевых токов.

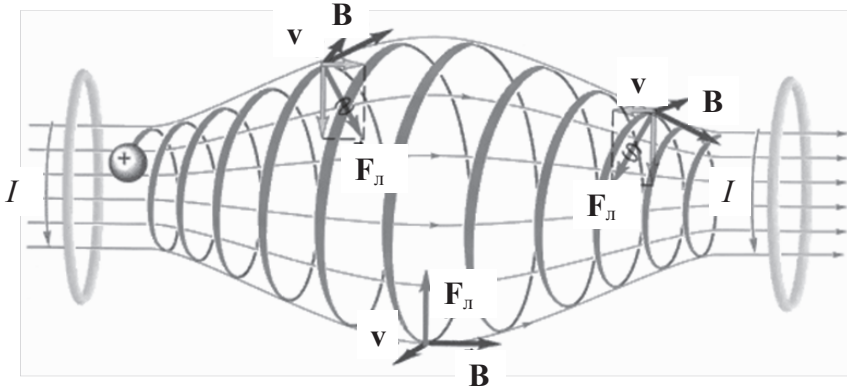


Рис. 2.21

Подобные магнитные ловушки используются в установках по получению управляемой термоядерной реакции и предназначены для удержания горячей плазмы в ограниченной области пространства в течение достаточно длительного времени. Задача эта пока не решена. Оказывается, отражение от магнитного зеркала испытывают лишь частицы, вектор скорости которых составляет с направлением поля угол α , удовлетворяющий условию

$$1 \geq \sin \alpha \geq \frac{B_0}{B}, \quad (2.31)$$

где B_0 — магнитная индукция в центральной области ловушки, а B — магнитная индукция в ее горлышке.

Конус, имеющий при вершине угол α_0 , равный

$$\sin \alpha_0 = \frac{B_0}{B}, \quad (2.32)$$

называется *конусом потерь*: частицы, скорости которых находятся в пределах этого конуса, покинут ловушку. В результате столкновений все новые и новые частицы покидают магнитную ловушку, и этот процесс протекает очень быстро. Поэтому время существования горячей плазмы в такой ловушке оказывается меньше, чем нам бы хотелось.

Земля имеет магнитные полюса, и ее магнитное поле также является неоднородным. Его силовые линии выходят из северного магнитного полюса S и входят в поверхность Земли на южном полюсе N (рис. 2.22). У полюсов линии магнитной индукции сходятся, что указывает на усиление магнитного поля. Частицы движутся, навиваясь на силовые линии магнитного поля, и достигают приполярных областей, обладающих свойствами магнитных зеркал.

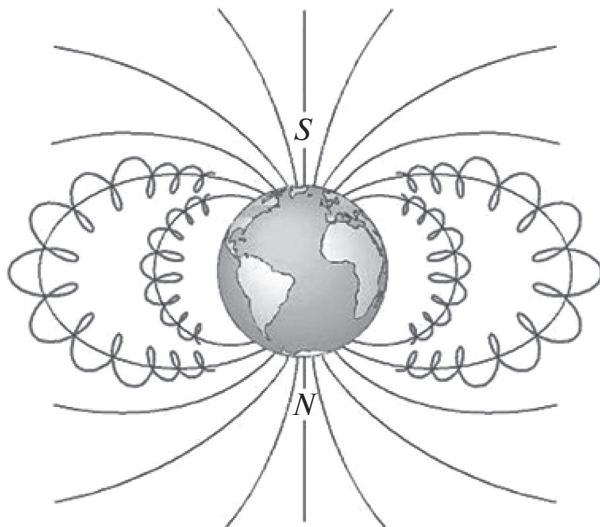


Рис. 2.22

Частицы, имеющие скорости, лежащие в пределах конуса потерь, попадают в плотные слои атмосферы, ионизируют молекулы воздуха и вызывают *северное сияние*. Остальные испытывают отражение вблизи полюсов и начинают двигаться в обратном направлении. Такие частицы удерживаются магнитным полем Земли достаточно долго и образуют *радиационные пояса Земли*.

Радиационные пояса были обнаружены в 1958 г. при помощи первых искусственных спутников. Исследования показали, что Земля помимо атмосферы окружена слоями, образованными высокоэнергетическими заряженными частицами, — радиационными поясами. Согласно современным представлениям существует один протонный и два электронных пояса. Протонный пояс находится на расстоянии от тысячи километров до примерно четырех земных радиусов от поверхности Земли и состоит из протонов с энергиями порядка 40 МэВ вбли-

зи внутренней границы пояса и около 0,5 МэВ в его внешних слоях. Электронные пояса находятся на расстояниях от полутора до пяти радиусов Земли от ее поверхности.

2.8. Ускорители заряженных частиц

Электромагнитные силы — единственные в природе, способные искусственным путем управлять движением частиц, меняя направление и модуль их скорости. Физики используют эту особенность электромагнитных сил при создании устройств, получивших название *ускорителей*. Существует большое число таких установок, и в основе их действия лежат два способа ускорения: *резонансный* и *индукционный*.

Одним их достаточно простых устройств, в основу которого положен резонансный способ ускорения тяжелых заряженных частиц (протоны, ионы), является *циклотрон*.

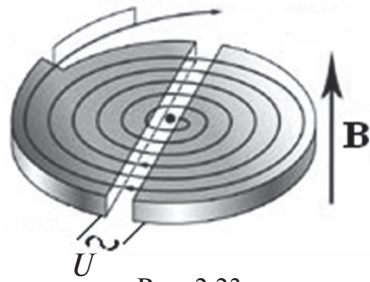


Рис. 2.23

Конструктивно циклострон состоит из двух дуантов, разделенных небольшим зазором (рис. 2.23). Дуанты представляют собой полые металлические электроды в виде плоских полуцилиндров, которые помещены в постоянное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} , направленное перпендикулярно плоскости дуантов. К дуантам подключен генератор переменного напряжения, которое изменяется по закону

$$U = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad (2.33)$$

где T — период обращения заряда q и массы m в магнитном поле с индукцией B , определяемый по формуле (2.24):

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ поместить в зазор заряженную частицу, она попадает в ускоряющее электрическое поле, приобретает энергию

$$\varepsilon_m = qU_m \quad (2.34)$$

и влетает в один из дуантов. Объем, заключенный внутри дуанта, является *эквипотенциальным*, поэтому модуль скорости частицы остается неизменным, но в магнитном поле она движется по окружности и через время $t = T/2$ вновь подлетает к зазору. К этому моменту напряжение в зазоре меняет знак на противоположный, заряд вновь попадает в ускоряющее электрическое поле и, пройдя зазор, получает очередную порцию энергии ε_m . Затем все многократно повторяется. По мере увеличения энергии скорость частицы растет и соответственно увеличивается радиус ее траектории, вид которой напоминает спираль.

За один оборот частица дважды пересекает зазор между дуантами, поэтому, совершив N оборотов, она приобретает энергию

$$W = 2N\varepsilon_m. \quad (2.35)$$

После достижения максимальной энергии поток частиц выводится из циклотрона при помощи специального устройства и попадает на мишень.

А чем ограничена эта максимальная энергия? Прежде всего, конечно, размером дуантов и величиной магнитного поля, поскольку согласно формуле (2.23)

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{qBR_m}{m}, \\ W_m &= \frac{mv_m^2}{2} = \frac{(qBR_m)^2}{2m}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Но это не все. Принцип действия циклотрона связан с постоянством периода обращения частицы в магнитном поле, который согласно формуле (2.24) пропорционален ее массе. При скоростях, сопоставимых со скоростью света, возникает зависимость массы от скорости, период обращения заряда начинает увеличиваться, и нарушается синхронизация частоты генератора и частоты обращения зарядов в магнитном поле. По этой причине циклотроны не используют для ускорения электронов: эти легкие частицы достигают околосветовых скоростей уже при относительно малых энергиях. Реально предел энергий протонов, ускоренных в циклотроне, составляет 15–20 МэВ. Нетрудно оценить число оборотов, совершенных при этом протонами, считая величину $U_m = 50$ кВ:

$$N = \frac{W_m}{2qU_m} \approx 2 \cdot 10^2.$$

Для генерации частиц с более высокими энергиями есть несколько возможностей. Поскольку с ростом скорости возникает релятивистское увеличение массы частицы, можно изменять по соответствующему закону частоту генератора, синхронизируя ее с убывающей частотой обращения заряда в магнитном поле. Такие устройства называются *фазотронами*.

Можно определенным образом увеличивать величину индукции магнитного поля, сохраняя неизменным отношение m/B в формуле (2.25). Этот принцип положен в основу работы *синхротронов*, которые применяют для получения очень энергичных электронов.

Ну и, наконец, можно изменять и величину поля, и частоту генератора. Это — *синхрофазотроны*. Магнитная индукция в них изменяется так, чтобы заряды (обычно протоны) двигались по орбите постоянно-го радиуса, а частота генератора синхронизирована с частотой обращения частиц. Эти устройства позволяют разгонять протоны вплоть до энергии 800 ГэВ ($8 \cdot 10^{11}$ эВ), при которой их скорость практически совпадает со скоростью света ($v \approx 0,9999988 c$).

Мы познакомились с ускорителями заряженных частиц резонансного типа. Индукционные ускорители будут рассмотрены в дальнейшем.

2.9. Эффект Холла

Возьмем проводник в виде плоской пластины толщиной b , поместим его в поперечное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} и пропустим по нему электрический ток плотностью \mathbf{j} (рис. 2.24, *а*). Носителями тока в металлическом проводнике являются электроны, направление движения которых противоположно вектору \mathbf{j} (рис. 2.24, *б*). Скорость $\langle u \rangle$ их упорядоченного движения связана с плотностью j тока соотношением (1.6):

$$\langle u \rangle = \frac{j}{en}. \quad (2.37)$$

Под действием силы Лоренца

$$F_{\perp} = e \langle u \rangle B \quad (2.38)$$

движущиеся электроны смещаются к нижней поверхности пластины, заряжая ее отрицательно. При этом на верхней поверхности появляется некомпенсированный положительный заряд. В проводнике

возникает поперечное электрическое поле, которое также действует на электроны с силой

$$F_{\text{эл}} = eE, \quad (2.39)$$

где E — напряженность этого поля.

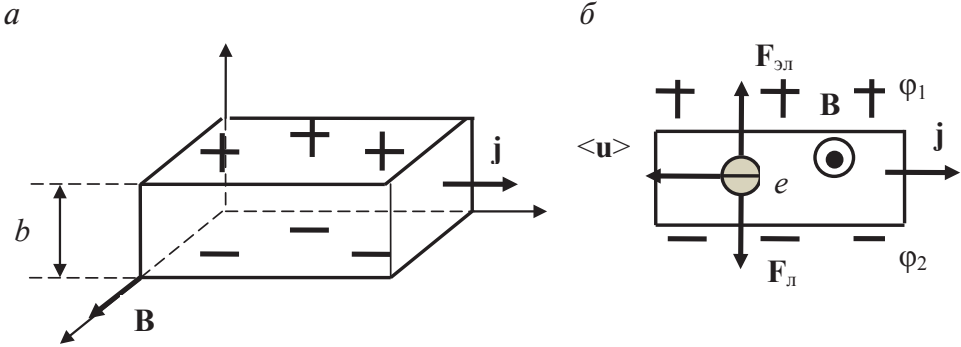


Рис. 2.24

Перераспределение зарядов в проводнике будет происходить до тех пор, пока эти силы не скомпенсируют друг друга:

$$\begin{aligned} F_{\text{эл}} &= F_{\text{л}}, \\ eE &= e\langle u \rangle B, \\ E &= \langle u \rangle B = \frac{j}{en} B. \end{aligned}$$

Поперечное электрическое поле в пластине можно считать однородным, поэтому

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{b} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b} = \frac{U_H}{b},$$

и тогда

$$U_H = \frac{1}{en} bjB. \quad (2.40)$$

Величина U_H , стоящая в левой части этого выражения, называется *напряжением Холла*, а коэффициент

$$R = \frac{1}{en} \quad (2.41)$$

получил название *постоянной Холла*.

У эффекта Холла имеется два важных применения. Во-первых, он лежит в основе работы *магнитометров* — приборов, измеряющих

магнитную индукцию. Принцип их действия очень прост: из формулы (2.40) следует, что

$$B = \frac{en}{bj} U_H. \quad (2.42)$$

При фиксированном токе, протекающем в *датчике Холла*, магнитная индукция пропорциональна напряжению Холла на его поверхностях.

Второе применение этого эффекта относится к физике металлов и полупроводников. Постоянная Холла (2.41) включает в себя заряд носителей тока и их концентрацию. Определение знака постоянной Холла R позволяет определить тип полупроводника: если он отрицательный, то речь идет о полупроводнике n -типа, у которого основными носителями тока являются электроны, если же $R > 0$, то мы имеем дело с полупроводником p -типа, у которого основные носители тока — дырки, имеющие положительный заряд.

Знание концентрации n свободных электронов в металлах и сплавах имеет большое значение при расчетах их физических и механических свойств.

Любопытный факт: у некоторых металлических сплавов (например, Mg—Cd, Mg—Li) постоянная Холла положительна. Эта аномалия объясняется квантовой теорией металлов.

2.10. Сила Ампера

Поместим в магнитное поле проводник с током и выделим малый элемент тока длиной dl (рис. 2.24). Носители тока участвуют в двух типах движения: хаотичное тепловое и упорядоченное. В магнитном поле с индукцией \mathbf{B} на них действует сила Лоренца

$$\mathbf{F}_л = e[(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}].$$

При усреднении по всем носителям тока, находящимся в элементе dl , вектор средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ теплового движения обращается в нуль, и тогда

$$\langle \mathbf{F}_л \rangle = e[\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}]. \quad (2.43)$$

Результирующую силу, действующую на все носители, находящиеся в этом элементе тока (обозначим их число как dN), мы назовем

силой Ампера. По сути, это сила, действующая со стороны магнитного поля на участок проводника с током I длиной dl :

$$d\mathbf{F}_A = dN\mathbf{F}_l = dNe[\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}].$$

Учтем, что

$$dN = nSdl,$$

где n — концентрация носителей, S — площадь поперечного сечения проводника, воспользуемся равенством (1.7), и тогда

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_A &= nSdle[\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}] = Sdl[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = S[dl\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = S[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \\ &= jS[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \end{aligned}$$

При проведении вычислений мы воспользовались понятным равенством $d\langle \mathbf{j} \rangle = d\mathbf{j}$.

Мы получили соотношение

$$d\mathbf{F}_A = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (2.44)$$

которое называют *законом Ампера*. Оно определяет силу, действующую на участок проводника с током I и длиной dl со стороны магнитного поля \mathbf{B} .

В скалярной форме этот закон принимает вид

$$dF_A = IBdl \sin \alpha, \quad (2.45)$$

где α — угол между направлением тока и вектором магнитной индукции. При α , равном 0 или π , сила Ампера обращается в нуль.

Сила Ампера перпендикулярна направлению тока и вектору \mathbf{B} , и ее направление определяется *правилом левой руки*, описанным в разделе 2.6.

Если рассмотреть проводник произвольной формы, то с формальной точки зрения необходимо проинтегрировать равенство (2.44):

$$\mathbf{F}_A = I \int_{(L)} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (2.46)$$

Для этого, конечно, необходимо знать форму проводника и конфигурацию линий магнитного поля. Для прямолинейного проводника длиной l в однородном поле в скалярном виде получим

$$F_A = IBl \sin \alpha. \quad (2.47)$$

В общем случае эта задача может оказаться весьма непростой и потребовать численных методов расчета.

2.11. Контур с током в магнитном поле

Поместим прямоугольный контур, имеющий ось вращения, в однородное магнитное поле таким образом, чтобы ось была перпендикулярна линиям магнитной индукции (рис. 2.25, а). Контур имеет размеры, указанные на рисунке, и нормаль к нему образует угол α линиями вектора \mathbf{B} .

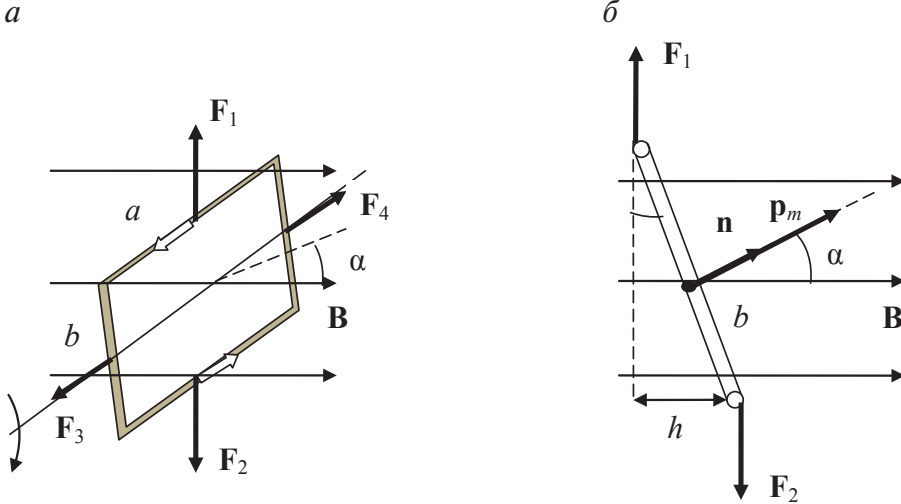


Рис. 2.25

При пропускании по контуру тока I на его стороны начинают действовать силы Ампера, две из которых (\mathbf{F}_3 и \mathbf{F}_4) направлены вдоль оси вращения в противоположных направлениях. Они равны по величине и их действие сводится лишь к возможной деформации контура. Оставшиеся две силы (\mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2) также равны и противоположно направлены, но они образуют *пару сил*, плечо которой равно h (рис. 2.25, б). Момент этой пары равен

$$M = Fh = IBa \sin 90^\circ h = IBabs \sin \alpha = IB S \sin \alpha. \quad (2.48)$$

В этих расчетах мы учли, что $F_1 = F_2 = F = IBa$, а $S = ab$ — площадь контура.

Контур с током имеет важную характеристику, которая называется *магнитный момент* \mathbf{p}_m контура:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= IS\mathbf{n}, \\ p_m &= IS, \quad [p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Как следует из определения, этот вектор направлен по нормали к плоскости контура, и его ориентация определяется *правилом правого винта* с учетом направления тока.

Тогда

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}]. \quad (2.51)$$

Как следует из рис. 2.25, силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 стремятся повернуть контур так, чтобы его магнитный момент был ориентирован по полю. Приложим *внешнюю* силу и увеличим угол α на малую величину $d\alpha$. При этом внешняя сила совершает работу dA

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha, \quad (2.52)$$

которая идет на увеличение потенциальной энергии контура в магнитном поле

$$dW_p = dA = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (2.53)$$

Нас будет интересовать зависимость потенциальной энергии от угла α , поэтому возьмем неопределенный интеграл от выражения (2.53):

$$W_p = \int p_m B \sin \alpha d\alpha = -p_m B \cos \alpha + \text{const.}$$

Выбор постоянной интегрирования — наш произвол. Будем считать, что потенциальная энергия равна нулю, если $\alpha = \pi/2$. В этом случае постоянная обращается в нуль, и тогда

$$W_p = -p_m B \cos \alpha = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}. \quad (2.54)$$

При $\alpha = 0$ потенциальная энергия принимает минимальное значение $W_{\min} = -p_m B$, соответствующее положению устойчивого равновесия контура, а при $\alpha = \pi$ контур будет находиться в положении неустойчивого равновесия, имея максимальную потенциальную энергию $W_{\max} = p_m B$.

2.12. Контур с током в неоднородном магнитном поле

Силы, действующие на контур в неоднородном магнитном поле, имеют две составляющие (рис. 2.26). Действие поперечных (\mathbf{F}_{1y} и \mathbf{F}_{2y}) мы изучили: они оказывают ориентирующее действие на контур,

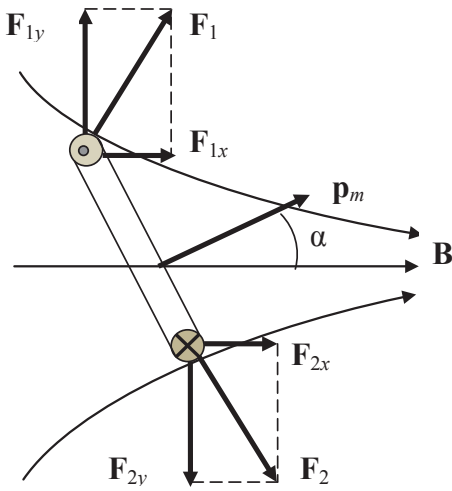


Рис. 2.26

стремясь повернуть его так, чтобы магнитный момент контура был направлен по полю. Займемся продольными составляющими (F_{1x} и F_{2x}). Они образуют результирующую силу $F_x = F_{1x} + F_{2x}$, под действием которой контур втягивается в область более сильного поля (или выталкивается из нее).

Найдем эту силу, воспользовавшись известной формулой, связывающей силу и потенциальную энергию:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(-p_m B \cos \alpha) = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (2.55)$$

Если магнитная индукция увеличивается в направлении оси x , как это изображено на рис. 2.26, то $\partial B / \partial x > 0$, и при $\alpha < 90^\circ$ контур будет втягиваться в область сильного поля ($F_x > 0$). В противном случае ($\alpha > 90^\circ$) контур будет выталкиваться из области сильного поля в область поля более слабого.

Вращательный момент, обусловленный поперечными составляющими сил, также, конечно, будет действовать на контур.

2.13. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Контур, содержащий источник тока и имеющий подвижную перемычку длиной l , поместим в однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к плоскости контура (рис. 2.27).

На перемычку будет действовать сила Ампера

$$F_A = IBl.$$

Работа dA этой силы при перемещении проводника на расстояние dx равна

$$dA = Fdx = IBl dx = IBdS, \quad (2.56)$$

где dS — площадь, которую покрывает перемычка при этом перемещении.

Введем понятие *магнитного потока*. Для этого рассмотрим элементарную площадку dS , помещенную в магнитное поле (рис. 2.28), и введем вектор $d\mathbf{S}$:

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}. \quad (2.57)$$

Элементарным магнитным потоком $d\Phi$ через площадку dS называется скалярная величина

$$d\Phi = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B dS \cos \alpha, \quad (2.58)$$

имеющая размерность $[d\Phi] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб}$.

Магнитный поток через произвольную поверхность S вычисляется через интегрирование этого выражения:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (2.59)$$

С учетом формулы (2.58) выражение (2.56) принимает вид

$$dA = I d\Phi,$$

и тогда работа по перемещению проводника на конечное расстояние будет равна

$$A = I \Delta\Phi = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (2.60)$$

Обратим внимание на то, что ток в цепи поддерживается постоянным благодаря источнику тока, который и совершает эту работу

При перемещении в магнитном поле контура с током работа вычисляется по такой же формуле.

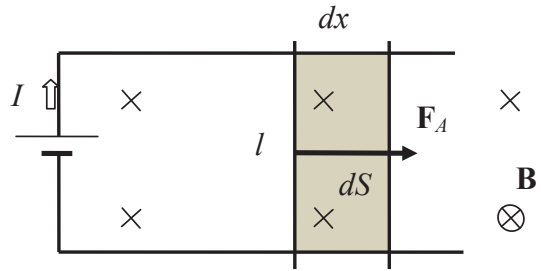


Рис. 2.27

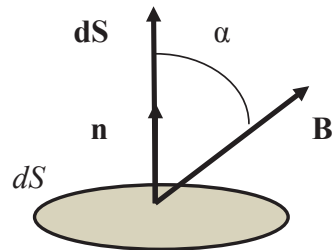


Рис. 2.28

Задачи к главе 2

Задача 2.1. Заряд, движущийся со скоростью $v = 900 \text{ м/с}$, в момент времени t создает в точке P электрическое поле с напряженностью $E = 600 \text{ В/м}$. Вектор напряженности образует угол $\alpha = 30^\circ$ с на-

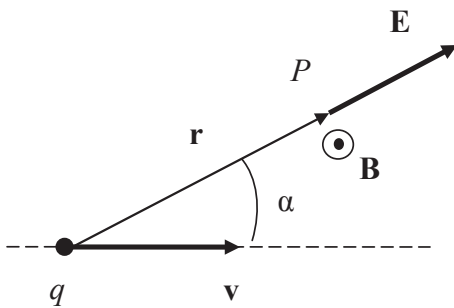


Рис. 2.29

правлением движения заряда. Найти модуль индукции магнитного поля, создаваемого этим зарядом в точке наблюдения в данный момент времени.

Решение. Напряженность электрического поля в точке P (рис. 2.29) вычисляется по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1)$$

Движущийся заряд создает в окружающем пространстве магнитное поле, индукция которого определяется выражением (2.13):

$$B = \frac{\mu_0 q v \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (2)$$

Разделим равенство (2) на равенство (1):

$$\frac{B}{E} = \epsilon_0 \mu_0 v \sin \alpha$$

и получим ответ:

$$B = \epsilon_0 \mu_0 E v \sin \alpha = 3,0 \text{ пТл}.$$

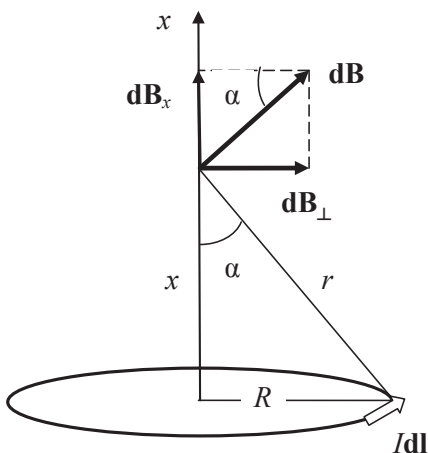


Рис. 2.30

Задача 2.2. Ток $I = 1,00 \text{ А}$ протекает по круговому контуру радиуса $R = 10,0 \text{ см}$. Вычислить индукцию магнитного поля на оси контура на расстоянии $x = 10,0 \text{ см}$ от плоскости контура и в его центре.

Решение. Выделим в контуре малый элемент тока Idl , создающий в точке наблюдения магнитное поле с индукцией dB (рис. 2.30):

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin 90^\circ}{4\pi r^2}.$$

Как видно из рисунка, вектор $d\mathbf{B}$ имеет две составляющие, из которых лишь одна дает вклад в результирующее значение магнитной индукции, направленной вдоль оси x :

$$dB_x = dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Проинтегрировав это выражение, мы ответим на первый вопрос задачи:

$$\begin{aligned} B_x &= \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I R \sin \alpha}{2r^2} = \frac{\mu_0 I R \sin \alpha}{2(R^2 + x^2)} = \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = 2,3 \text{ мкТл}. \end{aligned}$$

Ответ на второй вопрос мы получим, положив $x = 0$:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R} = 6,3 \text{ мкТл}. \quad (1)$$

Задача 2.3. По прямоугольному контуру с диагональю $d = 16$ см протекает ток $I = 5,0$ А. Вычислить магнитную индукцию в центре контура, если диагонали образуют угол $\varphi = 30^\circ$.

Решение. Поле в центре прямоугольника представляет собой суперпозицию полей, созданных каждой из сторон этого контура (рис. 2.31). Векторы этих полей в центре прямоугольника сонаправлены и перпендикулярны плоскости чертежа, поэтому для нахождения результирующего значения B магнитной индукции достаточно вычислить сумму

$$B = 2B_{12} + 2B_{23},$$

где B_{12} и B_{23} — значения индукции полей, созданных сторонами контура 1–2 и 2–3 (рис. 2.30).

Для решения воспользуемся результатом (2.8), полученным в разделе 2.2 для поля на перпендикуляре, проведенном из центра проводника:

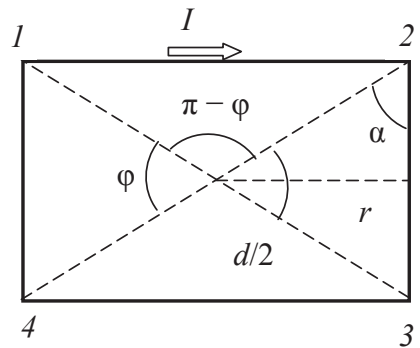


Рис. 2.31

$$\begin{aligned}
 B_{23} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2) \cos(\varphi/2)} \cos \alpha = \\
 &= \frac{\mu_0 I}{\pi d \cos(\varphi/2)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \tan \frac{\varphi}{2}, \\
 B_{12} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2) \cos((\pi - \varphi)/2)} \sin \alpha = \\
 &= \frac{\mu_0 I}{\pi d \sin(\varphi/2)} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \cotan \frac{\varphi}{2}, \\
 B &= \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \left(\tan \frac{\varphi}{2} + \cotan \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{4\mu_0 I}{\pi d \sin \varphi} = 0,10 \text{ мТл}.
 \end{aligned}$$

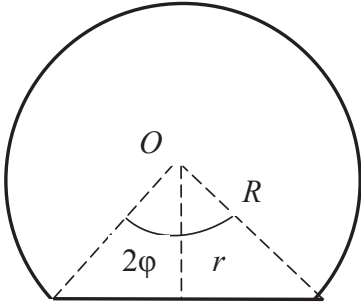


Рис. 2.32

Задача 2.4. По контуру, изображенному на рис. 2.32, протекает ток $I = 5,0$ А. Найти индукцию магнитного поля в точке O , если угол $2\varphi = \pi/2$ и радиус дуги окружности $R = 120$ мм.

Решение. Значение B магнитной индукции в точке O можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$B = B_1 + B_2,$$

где B_1 — индукция поля, созданного дугой окружности, а B_2 — индукция поля прямолинейного участка.

Воспользуемся известными результатами. Поле в центре кольцевого тока рассчитано в задаче 2.2 и определено формулой (1). Для нахождения индукции B_1 поля дуги окружности применим очевидную пропорцию:

$$B_1 = \frac{2\pi - 2\varphi}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{3\mu_0 I}{8R},$$

а магнитную индукцию B_2 прямого участка определим с помощью выражения (2.8):

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \alpha_1,$$

в котором положим $\alpha_1 = \pi/4$, а $r = R \sin \pi/4 = R/\sqrt{2}$. Тогда

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2\pi} \right) = 28 \text{ мкТл.}$$

Задача 2.5. Длинный прямой проводник имеет сечение в виде тонкого полукольца, имеющего радиус $R = 5,0$ см (рис. 2.33). Вычислить магнитную индукцию в точке O , если по проводнику протекает ток $I = 11,0$ А.

Решение. Представим этот проводник, имеющий форму желоба, в виде множества тонких длинных проводников шириной dl . Каждый из них создает в точке O свое поле. Рассмотрим один из них, указанный на рисунке, и представим вектор $d\mathbf{B}$ поля этого проводника в виде суммы

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_x + d\mathbf{B}_y.$$

Если взять аналогичный проводник, расположенный слева от оси y , поменяв угол $\alpha \rightarrow -\alpha$, то вектор $d\mathbf{B}_x$ останется тем же, а направление вектора $d\mathbf{B}_y$ изменится на противоположное. Нетрудно сообразить, что в итоге вектор индукции результирующего поля будет направлен вдоль оси x .

Поле, создаваемое проводником шириной dl , имеет индукцию

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R},$$

где ток dI , протекающий по этому проводнику, легко выразить из простой пропорции

$$\frac{dI}{I} = \frac{dl}{\pi R}.$$

Приняв во внимание, что $dl = R d\alpha$, получим

$$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi^2 R}.$$

Нас будет интересовать x -я составляющая вектора $d\mathbf{B}$

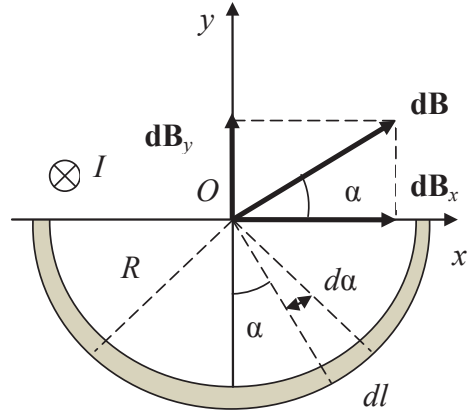


Рис. 2.33

$$dB_x = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{2\pi^2 R}.$$

Проинтегрировав это выражение, получим ответ:

$$B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \alpha d\alpha}{2\pi^2 R} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi^2 R} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{\pi^2 R}.$$

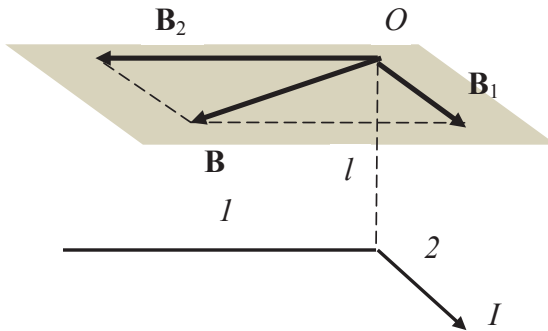


Рис. 2.34

Задача 2.6. Длинный прямой проводник согнули под прямым углом и пропустили по нему ток $I = 5,0$ А. Найти индукцию поля в точке O , находящейся на перпендикуляре, проведенном из точки изгиба проводника, к плоскости, в которой лежит проводник (рис. 2.34). Расстояние от точки O до плоскости

$l = 35$ см.

Решение. Данный проводник можно представить в виде двух полубесконечных проводников 1 и 2, каждый из которых создает в точке O свое поле. Поэтому индукция \mathbf{B} результирующего поля равна

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Вектора \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 взаимно перпендикулярны и равны по величине, следовательно,

$$B = B_1 \sqrt{2}.$$

Воспользовавшись формулой (2.10), получим ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \sqrt{2} = 2,0 \text{ мкТл}.$$

Задача 2.7. Внутри безграничной пластины толщиной $2d$ течет однородный ток, вектор плотности \mathbf{j} которого одинаков во всех точках и параллелен поверхности пластины. Найти модуль магнитной индукции поля

в зависимости от расстояния x до средней плоскости этой пластины.

Решение. Для начала выясним геометрию линий магнитной индукции этого поля. Ток, протекающий по пластине, можно представить в виде множества близко расположенных параллельных токов (рис. 2.35).

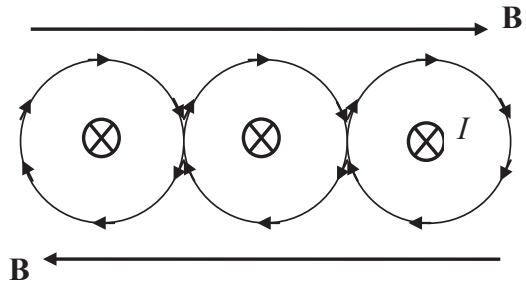


Рис. 2.35

Силловые линии поля каждого из них представляют собой окружности, которые налагаются друг на друга. При этом поперечные составляющие векторов магнитной индукции, перпендикулярные к пластине, скомпенсируют друг друга, тогда как продольные компоненты будут друг друга усиливать. В итоге линии результирующего поля будут параллельны поверхности пластины.

Для решения задачи воспользуемся теоремой о циркуляции вектора \mathbf{B} и в качестве контура L обхода выберем прямоугольник 1–2–3–4, целиком находящийся внутри пластины (рис. 2.36). Согласно формуле (2.16)

$$\int_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_{1,2} B dl + \int_{2,3} B dl \cos \frac{\pi}{2} + \int_{3,4} B dl + \int_{4,1} B dl \cos \frac{\pi}{2} = 2Bl = \mu_0 I_\Sigma.$$

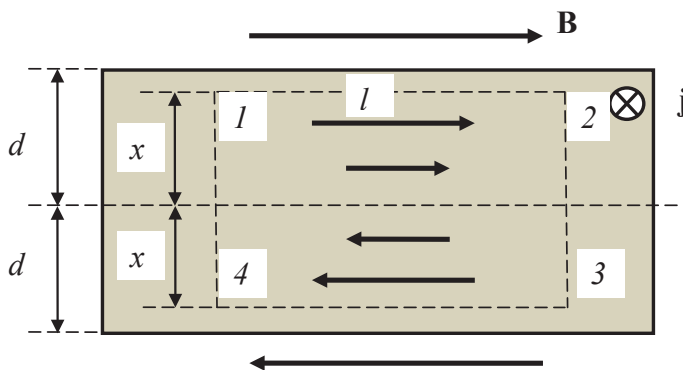


Рис. 2.36

Ток I_Σ , охватываемый контуром L , равен

$$I_{\Sigma} = j l 2x,$$

поэтому магнитная индукция внутри пластины определяется выражением

$$B = \mu_0 j x.$$

Для вычисления поля вне пластины изменим вертикальный размер контура, взяв $x > d$ (рис. 2.37).

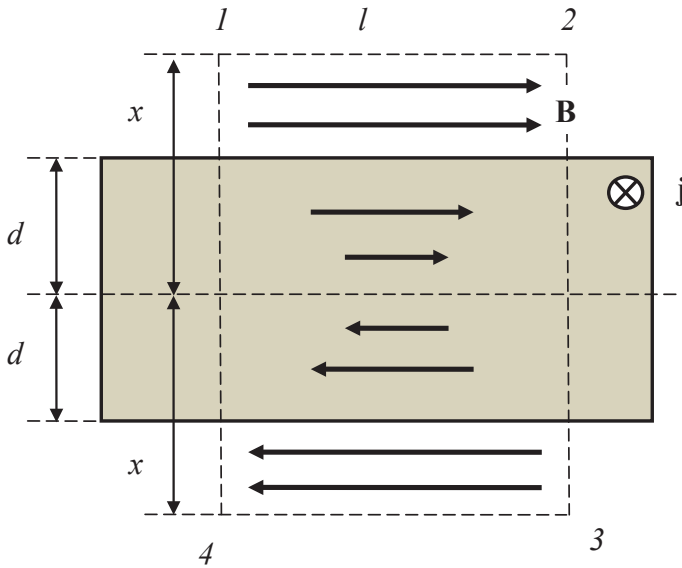


Рис. 2.37

В этом случае выражение для циркуляции поля останется прежним, но ток, охватываемый контуром, уже не будет зависеть от величины x :

$$I_{\Sigma} = j l 2d,$$

поэтому

$$2Bl = \mu_0 j l 2d,$$

$$B = \mu_0 j d = \text{const.}$$

Таким образом, поле вне пластины является однородным.

На рис. 2.38 изображен график зависимости магнитной индукции B_x от расстояния x до средней плоскости этой пластины.

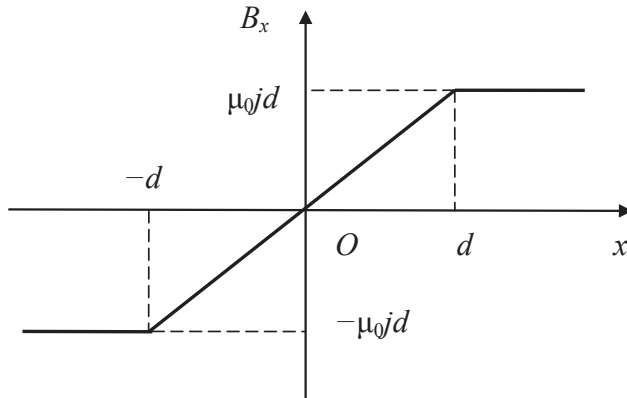


Рис. 2.38

Задача 2.8. Поток протонов движется равномерно и прямолинейно в скрещенных электрическом и магнитном полях перпендикулярно их силовым линиям. Напряженность электрического поля $E = 120$ кВ/м, индукция магнитного поля $B = 50$ мТл. Попадая на заземленную мишень, протоны создают в цепи ток $I = 0,80$ мА. Найти силу давления пучка на мишень.

Решение. В разделе 2.6 мы узнали, что необходимым условием прямолинейного движения заряда в скрещенных полях является выполнение равенства (2.30)

$$v = \frac{E}{B}.$$

При этом каждый протон обладает импульсом

$$p = mv = \frac{mE}{B}.$$

За время Δt на мишень попадет ΔN протонов, и это количество можно определить по формуле

$$\Delta N = \frac{I \Delta t}{q},$$

где $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд протона.

Тогда по второму закону Ньютона

$$F = \frac{p \Delta N}{\Delta t} = \frac{mIE}{qB} = 20 \text{ мкН}.$$

Задача 2.9. Максимальный радиус траектории протонов, ускоренных в циклотроне, равен $R = 50$ см. Магнитная индукция постоянного поля в циклотроне $B = 1,0$ Тл. Найти:

- а) максимальную кинетическую энергию ускоренных протонов;
- б) частоту переменного электрического поля в зазоре между дуантами, при которой кинетическая энергия будет равна $W_k = 20$ МэВ.

Решение. Радиус окружности, по которой заряд вращается в магнитном поле, определяется формулой (2.23):

$$R = \frac{mv}{qB},$$

поэтому

$$v = \frac{qBR}{m},$$

$$W_{\max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} = 12 \text{ МэВ}.$$

С другой стороны,

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}m(2\pi\nu R)^2 = 2m\pi^2\nu^2 R^2,$$

$$\nu = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{W_k}{2m}} = 20 \text{ МГц}.$$

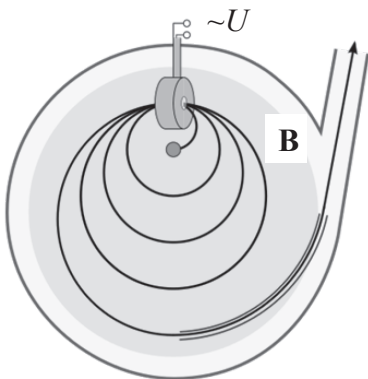


Рис. 2.39

Задача 2.10. Циклотрон не применяют для ускорения электронов: с увеличением энергии масса этих легких частиц резко возрастает, что приводит к быстрому изменению периода их обращения в магнитном поле. Для получения высокоэнергетичных электронов используют *микротрон*, в котором приращение периода ΔT обращения электронов оказывается кратным периоду T_0 ускоряющего их переменного электрического поля (рис. 2.39). Сколько оборотов должен совершить электрон,

чтобы достичь энергии $W_k = 4,6$ МэВ? Магнитная индукция поля $B = 107$ мТл, частота генератора переменного напряжения $\nu = 3,00$ ГГц. Приращение периода обращения электронов $\Delta T = T_0$.

Решение. Период обращения T электрона в магнитном поле с учетом релятивистского изменения его массы можно записать в виде

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (1)$$

Воспользуемся формулой для кинетической энергии релятивистской частицы:

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right),$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{W_k}{c^2} + m_0,$$

и тогда

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2\pi}{qB} \left(\frac{W_k}{c^2} + m_0 \right),$$

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} = \frac{2\pi}{qB} \frac{W_{kn} - W_{k(n-1)}}{c^2} = \frac{2\pi \Delta W_k}{qBc^2},$$

$$\Delta W_k = \frac{qBc^2}{2\pi} \Delta T = \frac{qBc^2}{2\pi} T_0 = \frac{qBc^2}{2\pi\nu}.$$

Найдем число оборотов, которые должен совершить электрон, чтобы достичь энергии W_k :

$$N = \frac{W_k}{\Delta W_k} = \frac{2\pi\nu W_k}{qBc^2} = 9.$$

Задача 2.11. Работа циклотрона основана на постоянстве периода обращения частицы в магнитном поле. При увеличении скорости частицы происходит увеличение ее релятивистской массы, что приводит к нарушению синхронизации частоты генератора и частоты обращения частицы в магнитном поле **В**. Для генерации частиц с более высокими энергиями можно изменять по соответствующему закону частоту $\omega(t)$ генератора, синхронизируя ее с убывающей частотой об-

ращения частицы. Такие устройства существуют и называется *фазотронами*. Найти закон изменения (модуляции) частоты $\omega(t)$ генератора фазотрона, если за каждый оборот частица с зарядом q получает приращение энергии ΔW .

Решение. Согласно формуле (1) предыдущей задачи

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Кинетическая энергия релятивистской частицы равна

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right),$$

и скорость ее изменения

$$\frac{dW_k}{dt} = m_0 v \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-3/2} \frac{dv}{dt}.$$

По условию

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{\Delta W}{T},$$

$$\frac{\Delta W}{T} = m_0 v \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-3/2} \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{\Delta W q B}{2\pi m_0} \left(1 - v^2/c^2 \right)^{1/2} = m_0 v \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-3/2} \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{\Delta W q B}{2\pi m_0} dt = \frac{1}{2} m_0 v \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-2} dv^2.$$

Проинтегрируем это равенство и проведем несложные преобразования:

$$\int_0^t \frac{\Delta W q B}{\pi m_0} dt = \int_0^v m_0 v \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-2} dv^2,$$

$$\frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2} t = c^2 \left(\left(1 - v^2/c^2 \right)^{-1} - 1 \right),$$

$$\frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t + 1 = \frac{1}{1 - v^2/c^2},$$

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t}}.$$

Закон, по которому изменяется частота генератора фазотрона, имеет вид

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{qB}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2} t}}.$$

Если ввести упрощающие обозначения

$$\omega_0 = \frac{qB}{m_0}, \quad \alpha = \frac{\Delta W q B}{\pi m_0^2 c^2},$$

то окончательный ответ будет таким:

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha t}}.$$

Задача 2.12. По прямому проводнику круглого сечения радиуса a протекает ток I . С поверхности проводника по нормали к ней вылетает электрон, имеющий начальную скорость v_0 . Чему равно максимальное расстояние r_m , на которое электрон удалится от оси проводника, прежде чем начнет обратное движение?

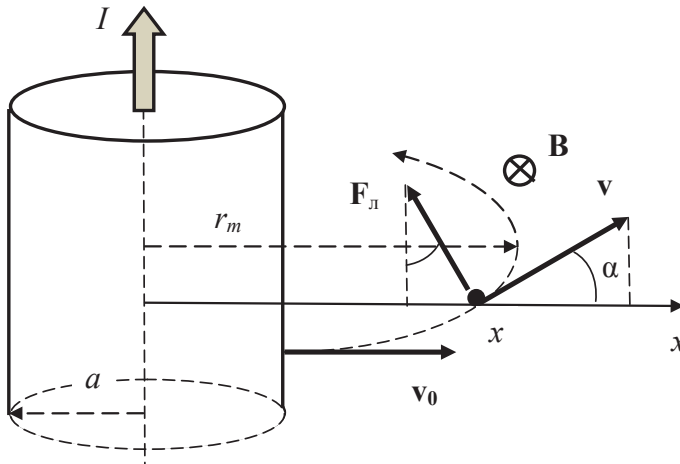


Рис. 2.40

Решение. Электрон находится в магнитном поле \mathbf{B} проводника с током I , и на него действует сила Лоренца \mathbf{F}_L , лежащая в плоскости чертежа (рис. 2.40). По второму закону Ньютона

$$\mathbf{F}_l = m\mathbf{a},$$

$$F_x = ma_x,$$

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv_x}{dx} v_x.$$

Учтем, что

$$v = v_0, \quad v_x = v \cos \alpha, \quad dv_x = -v \sin \alpha d\alpha,$$

$$F_x = -F_l \sin \alpha = -evB \sin \alpha = -ev \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \sin \alpha,$$

и тогда

$$-ev \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \sin \alpha = -m \frac{v \sin \alpha d\alpha}{dx} v \cos \alpha,$$

$$\int_a^{r_m} \frac{dx}{x} = \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 I e} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha,$$

$$\ln \frac{r_m}{a} = \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 I e},$$

$$r_m = a \exp \frac{v_0}{b}, \quad \text{где } b = \frac{\mu_0 I e}{2\pi m}.$$

Отметим два момента.

1. Сила Лоренца не меняет модуль скорости электрона, поэтому $v = v_0$.

2. На максимальном удалении от оси проводника вектор скорости направлен перпендикулярно оси x (рис. 2.39), поэтому верхний предел интеграла в правой части мы взяли равным $\pi/2$.

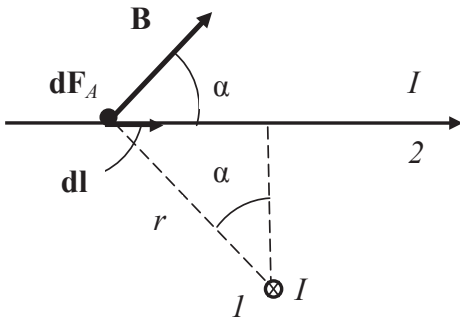


Рис. 2.41

Задача 2.13. Два длинных взаимно перпендикулярных прямых проводника, по которым протекают одинаковые токи I , находятся на расстоянии a друг от друга. Чему равна максимальная сила, действующая на единицу длины этих проводников?

Решение. Будем считать, что проводник I (он перпендикулярен плоскости чертежа) создает в окружаю-

щем пространстве магнитное поле, в котором находится проводник 2 (рис. 2.41). Выделим на нем малый элемент $d\mathbf{l}$, на который действует сила Ампера $d\mathbf{F}_A$, направленная перпендикулярно плоскости чертежа к нам и равная по величине

$$dF_A = IBdl \sin \alpha.$$

Найдем силу, действующую на единицу длины проводника:

$$\frac{dF_A}{dl} = IB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I^2 \sin 2\alpha}{4\pi a}.$$

Это выражение принимает максимальное значение

$$\frac{dF_A}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}$$

при $\alpha = \pi/4$.

Задача 2.14. Система состоит из двух параллельных проводников, один из которых представляет собой тонкую ленту шириной b (рис. 2.42). По проводникам протекают токи I_1 и I_2 . Найти силу взаимодействия этих проводников, приходящуюся на единицу их длины.

Решение. Будем считать, что проводник с током I_1 создает в окружающем пространстве магнитное поле, в котором находится лента, по которой протекает ток I_2 (рис. 2.42). Эту ленту можно представить в виде множества тонких параллельных проводников шириной dr каждый, по которым протекают токи

$$dI_2 = \frac{I_2 dr}{b}.$$

На каждый из них действует сила Ампера

$$dF_A = dI_2 B l \sin 90^\circ = dI_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi br} l dr.$$

Результирующую силу Ампера, действующую на единицу длины, найдем, интегрируя это выражение:

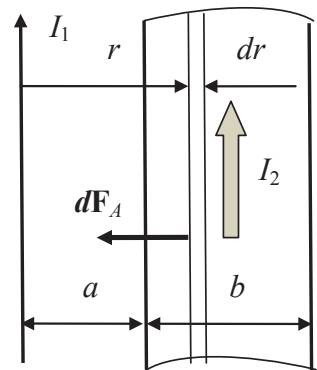


Рис. 2.42

$$\frac{F_A}{l} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

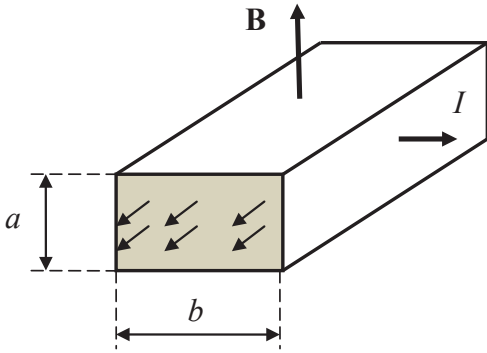


Рис. 2.43

Задача 2.15. Для перекачки расплавленного металла используют электромагнитные насосы, представляющие собой трубу прямоугольного сечения, помещенную в поперечное магнитное поле (рис. 2.43). Перпендикулярно оси трубы и вектору \mathbf{B} пропускают постоянный ток, в результате чего в потоке металла возникает избыточное давление. Оценить его величину, если $I = 100$ А, $B = 0,10$ Тл, $a = 2,0$ см.

Решение. На участок металла, по которому протекает ток, действует сила Ампера F_A , действующая в направлении движения потока металла и равная по величине

$$F_A = IBb.$$

Поэтому в трубе возникает избыточное давление

$$\Delta p = \frac{F_A}{ab} = \frac{IB}{a} = 0,5 \text{ кПа}.$$

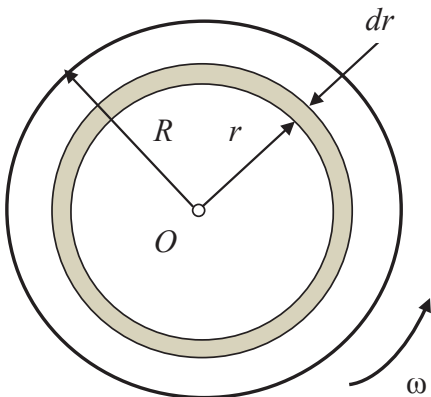


Рис. 2.44

Задача 2.16. На поверхности тонкого непроводящего диска радиуса R нанесен заряд с поверхностной плотностью σ . Диск приведен во вращение вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти:

а) магнитную индукцию поля в центральной точке O диска;

б) магнитный момент вращающегося диска.

Решение. Разобьем диск на множество тонких колец и рассмотрим одно из них, имеющее радиус r и толщину dr (рис. 2.44). На нем находится заряд dq , равный

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr.$$

При вращении этого кольца с угловой скоростью ω через произвольное поперечное сечение в единицу времени переносится заряд $vdq = \omega dq/2\pi$, что соответствует кольцевому току

$$dI = \omega dq / 2\pi = \omega \sigma r dr.$$

Согласно формуле (1), полученной в задаче 2.2, найдем поле этого тока в центре кольца:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr,$$

и тогда

$$B = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega dr = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R.$$

Магнитный момент кольцевого тока dI равен

$$dp_m = dIS = \omega \sigma r dr \pi r^2 = \pi \omega \sigma r^3 dr,$$

поэтому магнитный момент вращающегося диска будет равен

$$p_m = \int_0^R \pi \omega \sigma r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \omega \sigma R^4.$$

Задача 2.17. На конце левого коромысла весов закреплена небольшая катушка, помещенная между полюсами постоянного магнита. Справа ее уравнивает груз (рис. 2.45). При включении тока $I = 22$ мА в катушке равновесие нарушается, и для его восстановления массу груза увеличивают на величину $\Delta m = 60$ мг. Какова индукция магнитного поля в зазоре магнита? Катушка имеет $N = 200$ витков и площадь поперечного сечения $S = 1,0$ см². Плечо OA груза $l = 30$ см.

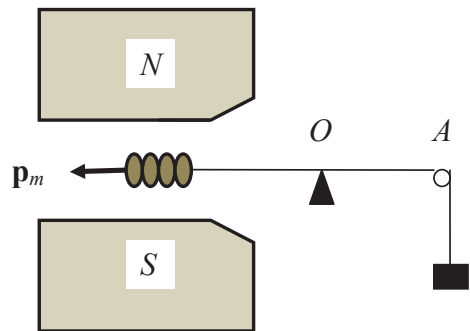


Рис. 2.45

Решение. При включении тока возникает магнитный момент \mathbf{p}_m катушки, приводящий к появлению действующего на нее дополнительного момента сил

$$M = p_m B \sin 90^\circ = ISNB,$$

для компенсации которого используют перегрузок Δm :

$$ISNB = \Delta mgl,$$

$$B = \frac{\Delta mgl}{ISN} = 0,4 \text{ Тл.}$$

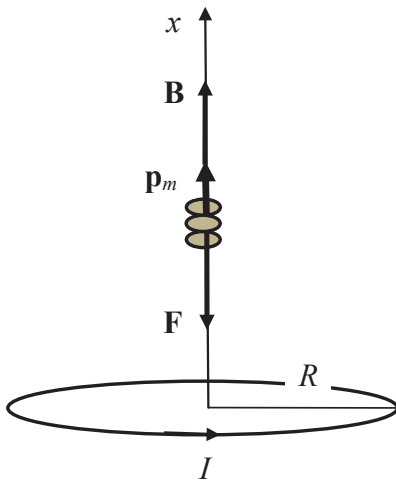


Рис. 2.46

Задача 2.18. На оси кольцевого тока I радиуса R находится небольшая катушка, магнитный момент которой \mathbf{p}_m сонаправлен с осью кольцевого витка (рис. 2.46). Найти силу, втягивающую катушку в область сильного поля, создаваемого кольцевым током, если она находится на расстоянии x от плоскости витка.

Решение. В неоднородном поле кольцевого тока на катушку действует сила \mathbf{F} , стремящаяся втянуть катушку в область более сильного поля. Ее проекция на ось x определяется выражением (2.55):

$$F_x = p_m \frac{dB_x}{dx} \cos 0^\circ.$$

Поле кольцевого тока мы вычислили в задаче 2.2:

$$B_x = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$F_x = -\frac{3}{2} p_m \mu_0 IR^2 x (R^2 + x^2)^{-5/2}.$$

Глава 3.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

3.1. Микроскопические магнитные моменты

Магнитными свойствами обладают все вещества — они реагируют на магнитное поле, а иногда могут и сами создавать его. Особенностью магнитных свойств различных веществ является то, что их природа носит микроскопический характер: они связаны с наличием у атомов и молекул микроскопических магнитных моментов, которые можно разделить на три типа.

1. *Электронный орбитальный момент* $(\mathbf{p}_m)_{\text{орб}}$. Согласно классическим представлениям электрон в атоме вращается по орбите и, таким образом, представляет собой кольцевой ток, с которым связан указанный магнитный момент. Если в атоме присутствуют несколько электронов, то их орбиты ориентированы в пространстве так, что соответствующие моменты либо компенсируют друг друга, либо создают результирующий магнитный момент, который по порядку величины совпадает с *магнетонном Бора*:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 10^{-23} \text{ Дж/Тл}, \quad (3.1)$$

где e — заряд электрона, m_e — его масса, \hbar — постоянная Планка.

2. *Спиновый магнитный момент* \mathbf{p}_{ms} электрона. Спин характеризует собственный механический момент частицы и является чисто квантовой ее характеристикой. Со спином связан магнитный момент частицы. Спиновый магнитный момент электрона ведет себя в магнитном поле также квантово: он ориентируется либо по направлению поля, либо против него. При этом его проекция на направление поля (ось z) может принимать только два значения:

$$(p_{ms})_z = \pm \mu_B. \quad (3.2)$$

3. *Ядерный магнитный момент* $(\mathbf{p}_m)_{\text{ядер}}$ представляет собой суммарный магнитный момент нуклонов, входящих в состав ядра. Он либо равен нулю, либо имеет величину порядка *ядерного магнетона*

$$\mu_{\text{ядер}} = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 0,5 \cdot 10^{-26} \text{ Дж/Тл}, \quad (3.3)$$

где m_p — масса протона. Эти магнитные моменты малы и в дальнейшем мы их учитывать не будем.

3.2. Намагниченность вещества. Токи намагничивания

При внесении вещества в магнитное поле возникает его *намагничивание* — вещество приобретает макроскопический магнитный момент, для количественного описания которого вводят *намагниченность* \mathbf{J} магнетика, характеризующую суммарный магнитный момент в единичном объеме вещества:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_{mi}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{p}_{mi} — микроскопические магнитные моменты частиц, находящихся в объеме ΔV .

Как описать эти моменты с точки зрения классической физики? Мы будем считать, что их источниками являются микроскопические кольцевые токи, непрерывно циркулирующие внутри атомов и молекул. Особенностью этих микротоков является их неразрушимость, поэтому они не вносят вклад в токи проводимости.

Этот подход впервые сформулировал в виде гипотезы еще Ампер задолго до создания базовых положений классической электродинамики. Он вполне объясняет возникновение электронных орбитальных моментов, но его можно применять и в случае микроскопических магнитных моментов любой природы: различие между кольцевыми микротоками и магнитными моментами имеет значение только внутри микрочастиц.

Таким образом, намагниченность \mathbf{J} представляет собой суммарный магнитный момент, созданный микротоками, циркулирующими внутри атомов и молекул единицы объема магнетика. Их усреднение приводит к появлению *токов намагничивания* I_M , которые с макроскопи-

ческой точки зрения и вызывают появление намагниченности вещества. Отметим, что токи намагничивания не связаны с переносом заряда в объеме магнетика. Их вводят для описания намагниченности вещества.

Различают объемный $(I_M)_{об}$ и поверхностный $(I_M)_{пов}$ токи намагничивания. Для описания объемной составляющей рассмотрим магнетик произвольной поверхностью S и выберем на ней малую площадку dS (рис. 3.1). Через нее протекает объемный ток $(dI_M)_{об}$, который можно представить в виде

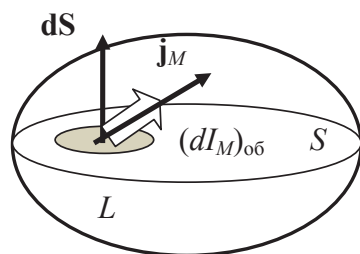


Рис. 3.1

$$(dI_M)_{об} = \mathbf{j}_M d\mathbf{S}, \quad (3.5)$$

где \mathbf{j}_M — плотность объемного тока намагничивания. Тогда

$$(I_M)_{об} = \int_S \mathbf{j}_M d\mathbf{S}. \quad (3.6)$$

С поверхностной составляющей тока намагничивания ситуация иная. Для ее описания введем вектор *линейной плотности тока* \mathbf{i}_M , указывающий направление линий тока (рис. 3.2, а), его модуль i_M определим так. Пусть через поперечный отрезок dl_{\perp} на поверхности магнетика протекает поверхностный ток $(dI_M)_{пов}$. Тогда

$$i_M = \frac{(dI_M)_{пов}}{dl_{\perp}}. \quad (3.7)$$

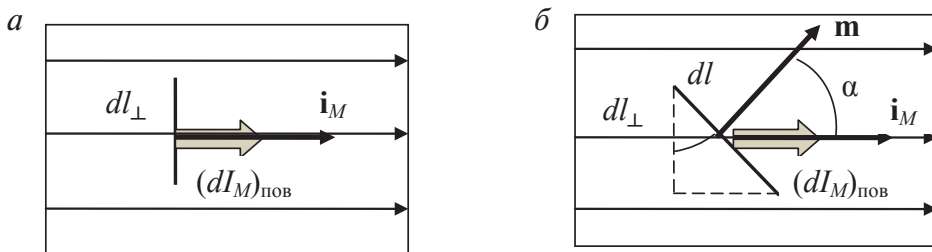


Рис. 3.2

Перепишем это выражение в виде

$$(dI_M)_{пов} = i_M dl_{\perp}$$

и преобразуем его для случая, когда отрезок dl ориентирован произвольным образом (рис. 3.2, б):

$$(dI_M)_{\text{пов}} = i_M dl_{\perp} = i_M dl \cos \alpha = (\mathbf{i}_M \mathbf{m}) dl. \quad (3.8)$$

В этих преобразованиях мы воспользовались очевидным равенством

$$i_M \cos \alpha = (\mathbf{i}_M \mathbf{m}),$$

где \mathbf{m} — единичный вектор нормали к отрезку dl .

Поверхностный ток, пересекающий произвольный контур L , лежащий на поверхности магнетика, будет равен

$$(I_M)_{\text{пов}} = \int_L (\mathbf{i}_M \mathbf{m}) dl. \quad (3.9)$$

При рассечении магнетика поверхностью S (рис. 3.1) поверхностный ток будет протекать через замкнутую линию L , образованную в результате пересечения этой поверхности с поверхностью магнетика.

3.3. Связь токов намагничивания с намагниченностью вещества

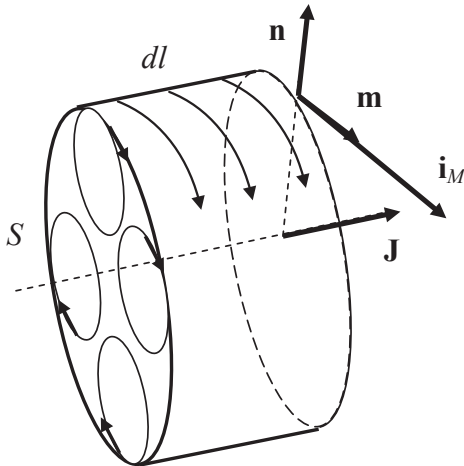


Рис. 3.3

Поместим цилиндрический магнетик высотой dl и площадью основания S в магнитное поле таким образом, чтобы его ось была сонаправлена с вектором намагниченности \mathbf{J} . Кольцевые токи внутри микрочастиц будут циркулировать в плоскости, перпендикулярной этой оси, образуя ток $(dI_M)_{\text{пов}}$, протекающий по боковой поверхности цилиндра (рис. 3.3).

Этот цилиндр обладает магнитным моментом, который можно вычислить двумя различными способами. С одной стороны, согласно формуле (3.4)

$$dp_m = JdV,$$

а с другой — мы имеем кольцевой ток, магнитный момент которого

$$dp_m = (dI_M)_{\text{пов}} S = i_M dl S = i_M dV.$$

Сопоставляя эти выражения, приходим к равенству

$$i_M = J, \quad (3.10)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{i}_M = [\mathbf{J} \times \mathbf{n}]. \quad (3.11)$$

Еще раз вернемся к рис. 3.1 и рассмотрим микроток, циркулирующие вблизи поверхности S . Одни не «рассекаются» этой поверхностью, а другие пересекают ее дважды: один раз вниз, а второй — вверх (рис. 3.4). Это означает, что *резльтирующий ток намагничивания через рассекающую магнетик поверхность равен нулю:*

$$I_M = 0, \quad (3.12)$$

$$(I_M)_{\text{об}} + (I_M)_{\text{пов}} = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_S \mathbf{j}_M d\mathbf{S} + \oint_L (\mathbf{i}_M \mathbf{m}) dl = 0. \quad (3.14)$$

В последнем выражении мы учли, что линия пересечения поверхности S с поверхностью магнетика представляет собой замкнутый контур L (рис. 3.5).

Вычислим поверхностный ток намагничивания, протекающий через линию пересечения L :

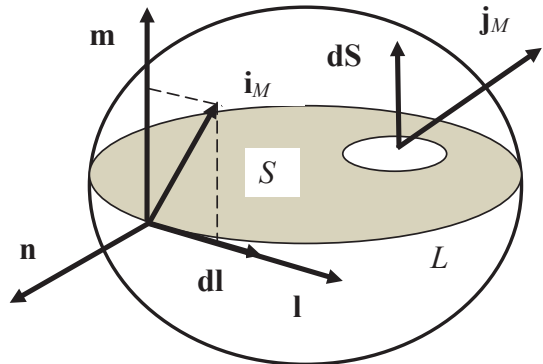


Рис. 3.5

$$\begin{aligned}
 (I_M)_{\text{пов}} &= \oint_L (\mathbf{i}_M \mathbf{m}) dl = \oint_L ([\mathbf{J} \times \mathbf{n}] \mathbf{m}) dl = \\
 &= - \oint_L (\mathbf{J} [\mathbf{m} \times \mathbf{n}]) dl = - \oint_L \mathbf{J} \mathbf{l} dl = - \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Проводя вычисления, мы воспользовались циклической перестановкой в смешанном произведении и учли, что

$$d\mathbf{l} = \mathbf{l} dl,$$

где \mathbf{l} — единичный вектор, равный $\mathbf{l} = [\mathbf{m} \times \mathbf{n}]$ и касательный к линии пересечения L .

Объемная составляющая $(I_M)_{\text{об}}$ тока намагничивания, как следует из равенства (3.13), равна

$$(I_M)_{\text{об}} = - (I_M)_{\text{пов}} = \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l}, \tag{3.16}$$

и с учетом (3.6) получим

$$\begin{aligned}
 \int_S \mathbf{j}_M d\mathbf{S} &= \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l} = \int_S [\nabla \times \mathbf{J}] d\mathbf{S}, \\
 \mathbf{j}_M &= [\nabla \times \mathbf{J}].
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Соотношения (3.11) и (3.17) связывают токи намагничивания и намагниченность вещества.

3.4. Напряженность \mathbf{H} магнитного поля.

Связь напряженности поля и намагниченности вещества

Согласно теореме о циркуляции поля \mathbf{B}

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_\Sigma, \tag{3.18}$$

где I_Σ — ток, пронизывающий поверхность, *натянутую* на контур L , включающий в себя ток проводимости $I_{\text{пр}}$ и *объемную* часть тока намагничивания $(I_M)_{\text{об}}$. Поэтому

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}} + (I_M)_{\text{об}} = I_{\text{пр}} + \oint_L \mathbf{J} d\mathbf{l},$$

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) d\mathbf{l} = I_{\text{пр}}. \quad (3.19)$$

Выражение, стоящее под интегралом в левой части, назовем *напряженностью \mathbf{H} магнитного поля*:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J}. \quad (3.20)$$

Равенство (3.19) принимает вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{пр}} \quad (3.21)$$

и является математической формулировкой теоремы о циркуляции вектора \mathbf{H} : *циркуляция вектора напряженности \mathbf{H} магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов проводимости, протекающих через поверхность, ограниченную этим контуром.*

Применив к левой части выражения теорему Стокса, получим

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{H}] d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_{\text{пр}} d\mathbf{S},$$

и тогда

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{j}_{\text{пр}}.$$

Между намагниченностью \mathbf{J} и напряженностью \mathbf{H} поля существует связь:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (3.22)$$

где χ — магнитная восприимчивость вещества. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \chi \mathbf{H}, \\ (1 + \chi) \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{(1 + \chi) \mu_0}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $\mu = 1 + \chi$ и назовем эту величину *магнитной проницаемостью среды*. Тогда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu \mu_0}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.23)$$

Связь индукции и напряженности магнитного поля в вакууме имеет вид

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}, \quad \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad (3.24)$$

поскольку в вакууме $\chi = 1$ и $\mu = 1$.

3.5. Магнитное поле в веществе

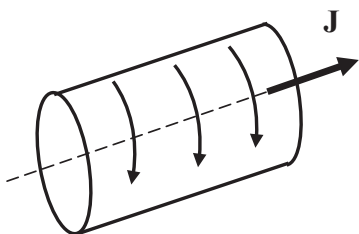


Рис. 3.6

В безграничном магнетике, находящемся во внешнем магнитном поле \mathbf{B}_0 , выделим длинный цилиндр таким образом, чтобы его ось совпадала по направлению с вектором намагниченности \mathbf{J} (рис. 3.6). Как уже отмечалось (см. рис. 3.3), по его поверхности течет ток намагничивания, имеющий линейную плотность

$$i_M = J.$$

По сути, у нас образовался соленоид, в объеме которого существует магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'. \quad (3.25)$$

В этом выражении \mathbf{B}' — это индукция поля, порожденного поверхностными токами намагничивания. Для ее вычисления воспользуемся известной формулой для индукции поля в объеме длинного соленоида:

$$B_{\text{солен}} = \mu_0 n I,$$

в которой n — число витков обмотки соленоида, приходящееся на единицу его длины. Таким образом, nI соответствует линейной плотности i_M , и тогда

$$B' = \mu_0 i_M = \mu_0 J,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{\mu} \mathbf{B}.$$

Подставив это выражение в формулу (3.25), получим

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0, \quad (3.26)$$

из которого виден физический смысл магнитной проницаемости μ . Она показывает отличие индукции \mathbf{B} магнитного поля в среде от индукции \mathbf{B}_0 поля в вакууме.

С учетом соотношений (3.23) и (3.24) равенство (3.26) принимает вид

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0. \quad (3.27)$$

Ситуация меняется, если рассмотреть магнетик конечных размеров. В этом случае

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{\text{разм}}, \quad (3.28)$$

где $\mathbf{H}_{\text{разм}}$ — напряженность дополнительного *размагничивающего* поля, связанного с наличием у магнетика определенных границ. Опыт показывает, что

$$\mathbf{H}_{\text{разм}} = N\mathbf{J}, \quad (3.29)$$

где параметр N зависит от формы магнетика и называется *размагничивающим фактором*. Его конкретные значения приведены в соответствующих таблицах. В частности, для длинного соленоида, намагниченного вдоль его оси (рис. 3.7, а), $N = 0$ и поэтому

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0. \quad (3.30)$$

Для плоского диска (рис. 3.7, б) $N = 1$, и тогда

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}}{\mu}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad (3.31)$$

а для шара (рис. 3.7, в) $N = 1/3$.

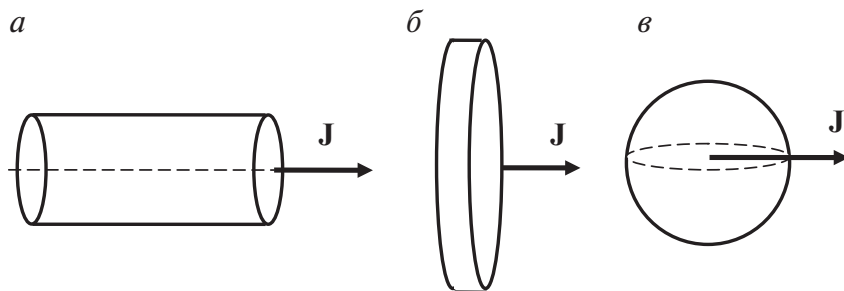


Рис. 3.7

3.6. Условия на границе раздела двух магнетиков

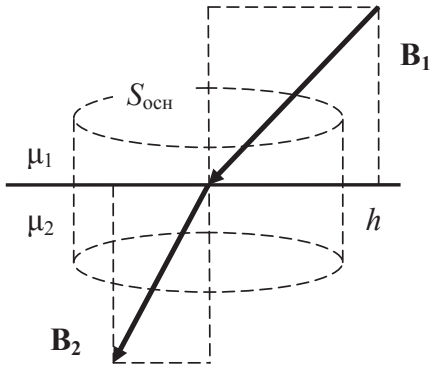


Рис. 3.8

Поместим в магнитное поле два магнетика, разделенные общей границей и имеющие проницаемости μ_1 и μ_2 (рис. 3.8). Индукция поля вблизи границы принимает значения \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 .

Применим теорему Гаусса, взяв в качестве замкнутой поверхности S поверхность цилиндра высотой h и площадью основания $S_{\text{очн}}$:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (3.32)$$

Полагая высоту h малой (в пределе $h \rightarrow 0$), можно пренебречь потоком через боковую поверхность, и тогда

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = -B_{1n} S_{\text{очн}} + B_{2n} S_{\text{очн}} = 0, \\ B_{1n} = B_{2n}. \quad (3.33)$$

Для вектора напряженности \mathbf{H} получим аналогичное соотношение, воспользовавшись формулой (3.23):

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (3.34)$$

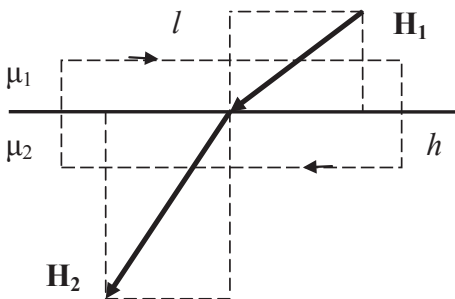


Рис. 3.9

Соотношение между тангенциальными составляющими получим при помощи соотношения (3.21), выбрав прямоугольный контур L со сторонами l и h и предполагая отсутствие у границы раздела токов проводимости (рис. 3.9):

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0. \quad (3.35)$$

Перейдем к пределу $h \rightarrow 0$ и получим

$$-H_{1t} l + H_{2t} l = 0,$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (3.36)$$

$$\frac{B_{1n}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (3.37)$$

В качестве примера вычислим индукцию поля в зазоре электромагнита, изображенного на рис. 3.10. Он представляет собой массивный железный сердечник с узким зазором шириной l , на который намотано N витков толстого провода. При пропускании тока I это устройство создает в зазоре весьма сильное магнитное поле с индукцией B_0 .

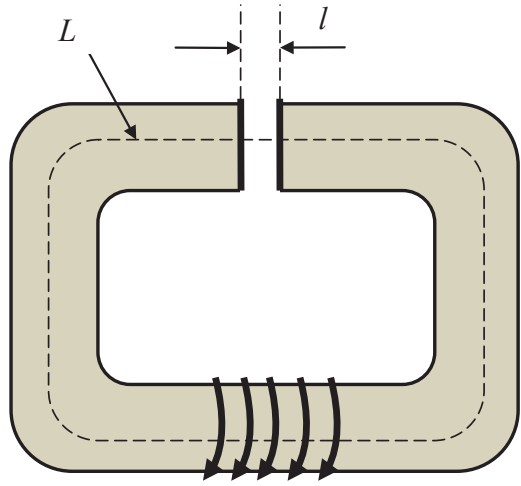


Рис. 3.10

Воспользуемся формулой (3.21) и преобразуем ее:

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= NI, \\ \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_{L-l} H dl = \int_l H_0 dl = H(L-l) + H_0 l = \\ &= \frac{B}{\mu\mu_0}(L-l) + \frac{B_0}{\mu_0}l. \end{aligned}$$

Вектора \mathbf{B}_0 и \mathbf{B} (в зазоре и сердечнике) перпендикулярны границе «сердечник — зазор» и согласно условию (3.35) их модули равны, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{L-l}{\mu} + l \right) &= NI, \\ B_0 &= \frac{\mu_0 NI}{\frac{L-l}{\mu} + l}. \end{aligned}$$

Проведем количественную оценку полученного результата. В качестве материала сердечника электромагнитов используют железо и сплавы на его основе, обладающие очень высокой магнитной проницаемостью (она достигает значений 10^3 – 10^4). Осевая линия L сердечника имеет длину, обычно не превышающую 1 метр, а ширина зазора имеет порядок 1 см. С учетом этих оценок

$$B_0 \approx \frac{\mu_0 NI}{l}. \quad (3.38)$$

Таким образом, для получения сильных магнитных полей следует использовать обмотки, содержащие большое количество витков провода, сечение которого позволяет выдерживать высокие токи, а также максимально уменьшать ширину зазора электромагнита.

3.7. Магнитомеханические явления

Совокупность задач, решаемых в рамках макроскопической теории магнетизма, можно сформулировать как установление зависимости намагниченности вещества от величины внешнего магнитного поля и температуры образца. Для этого необходимо понимать микроскопическую природу намагниченности, и главная проблема здесь заключается в том, что механизмы, лежащие в основе этого явления, носят чисто квантовый характер и, по сути, не имеют классических аналогов. Как быть? Там, где это возможно, мы будем применять классические оценки, а в ряде случаев воспользуемся результатами квантовой физики.

Квантовая теория устанавливает соотношение, связывающее магнитный момент \mathbf{p}_m микрочастицы с ее моментом импульса \mathbf{L} , который мы будем называть механическим моментом:

$$\mathbf{p}_m = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \mathbf{L}, \quad (3.39)$$

где e и m_e — заряд и масса электрона, а g называется *фактором Ланде* (или g -фактором). Он определяется состоянием микрочастицы. В частности, для орбитального момента $g = 1$, а для спинового $g = 2$.

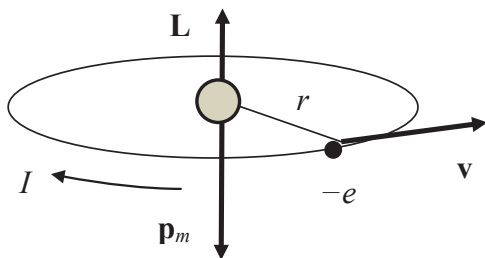


Рис. 3.11

Соотношение (3.39) можно проиллюстрировать с классической точки зрения на примере орбитального движения электрона в атоме (рис. 3.11).

Механический момент электрона в этом случае

$$L = mvr, \quad (3.40)$$

а его магнитный момент совпадает с магнитным моментом контура с током:

$$p_m = IS = ev\pi r^2 = \frac{1}{2}e\omega r^2 = \frac{1}{2}evr. \quad (3.41)$$

Их отношение равно

$$\frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e}, \quad (3.42)$$

и тогда в векторной форме

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}, \quad (3.43)$$

что совпадает с равенством (3.39) при $g = 1$. Знак «минус» в этой формуле появился вследствие антипараллельности векторов \mathbf{p}_m и \mathbf{L} . Отношение, представленное равенством (3.42), называется *гиромагнитным*.

Таким образом, при возникновении намагниченности магнетик приобретает момент импульса. Явления, в основе которых лежит этот эффект, получили название *магнитомеханических*.

Подтверждением сказанному служит опыт Эйнштейна — де Хааза, в котором железный цилиндр, подвешенный на тонкой упругой нити, был размещен внутри соленоида, по которому пропускали переменный ток. Частота тока совпадала с собственной частотой крутильных колебаний стержня. В системе возникал резонанс, что приводило к заметному увеличению амплитуды крутильных колебаний. Любопытно, что гиромагнитное отношение, полученное в этом опыте, оказалось в два раза больше, чем приведенное в формуле (3.42). Этот результат свидетельствует о том, что намагниченность железа связана не с орбитальным, а со спиновым магнитным моментом электрона, для которого фактор Ланде $g = 2$.

3.8. Диамагнетизм

Диамагнетизмом называют явление возникновения в веществе, помещенном во внешнее поле \mathbf{B} , намагниченности \mathbf{J} , ориентированной *против поля*. Это универсальный механизм, присущий всем веществам. Его эффект очень слаб и практически наблюдается только

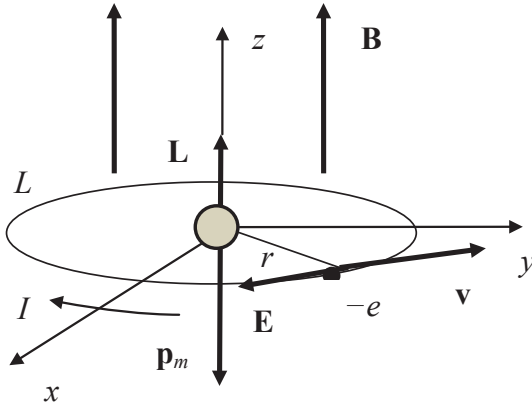


Рис. 3.12

тогда, когда у атомов магнетика отсутствует собственный магнитный момент. Такие вещества называются *диамагнетиками*, и к ним относятся, например, вода, медь, свинец и другие вещества — твердые, жидкие и газообразные.

Чтобы понять природу этого явления, рассмотрим электрон в атоме, вращающийся вокруг ядра. В предыдущем разделе мы установили соот-

ношение (3.43), связывающее магнитный и механический моменты этого электрона:

$$\mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}. \quad (3.44)$$

Включим *постепенно* магнитное поле, направление которого совпадает с осью z (рис. 3.12). Меняющееся со временем магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле, линии которого замкнуты, а его циркуляция описывается уравнением

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (3.45)$$

В этом уравнении контур L совпадает с орбитой электрона, а S — площадь, ею ограниченная.

Проведем интегрирование этого равенства и получим

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi r &= -\frac{dB}{dt} \pi r^2, \\ E &= -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \end{aligned}$$

Таким образом, на электрон начинает действовать сила $F = -eE$, момент которой относительно центра вращения

$$M = Fr = \frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (3.46)$$

Момент силы изменяет момент импульса электрона:

$$dL = Mdt = \frac{er^2}{2} dB,$$

$$\Delta L = \frac{er^2}{2} \int_0^B dB = \frac{er^2}{2} B.$$

В векторной форме это равенство принимает вид

$$\Delta \mathbf{L} = \frac{er^2}{2} \mathbf{B}. \quad (3.47)$$

Итак, момент импульса электрона увеличился, а это означает, что возрос и его магнитный орбитальный момент. Согласно формуле (3.43)

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \Delta \mathbf{L} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \mathbf{B}.$$

Суммируя по всем орбитам, мы находим магнитный момент, приобретенный атомом при включении магнитного поля (он называется *индуцированным*):

$$(\Delta \mathbf{p}_m)_{\text{ат}} = -\frac{e^2}{4m_e} \left(\sum_{i=1}^Z r_i^2 \right) \mathbf{B}. \quad (3.48)$$

Теперь мы легко найдем намагниченность диамагнетика:

$$\mathbf{J}_{\text{ДМ}} = n(\Delta \mathbf{p}_m)_{\text{ат}} = -\frac{ne^2}{4m_e} \left(\sum_{i=1}^Z r_i^2 \right) \mathbf{B}, \quad (3.49)$$

где n — концентрация атомов вещества, Z — число электронов в атоме, совпадающее с порядковым номером элемента в периодической таблице.

Существенный недостаток этой формулы заключается в следующем. Согласно положениям квантовой механики электрон — это не шарик, который вращается по орбите вокруг ядра. Имеет смысл говорить лишь о наиболее вероятном расстоянии $\langle R_i \rangle$, на котором находится электрон. И тогда формула (3.49) принимает вид

$$\mathbf{J}_{\text{ДМ}} = -\frac{ne^2}{6m_e} \left(\sum_{i=1}^Z \langle R_i^2 \rangle \right) \mathbf{B}. \quad (3.50)$$

Числовой коэффициент (цифра 6) в знаменателе этого выражения получается при точном квантово-механическом расчете.

Практическое совпадение формул (3.49) и (3.50) — редкий случай, когда использование весьма грубой модели приводит к вполне разумному результату.

Намагниченность диамагнетика направлена против поля, не зависит от температуры, и ее величина крайне мала. Для оценки воспользуемся формулами (3.22) и (3.23):

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} = \frac{\chi \mathbf{B}}{\mu_0 (1 + \chi)} \approx \frac{\chi \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (3.51)$$

$$\chi_{\text{ДМ}} = -\frac{\mu_0 n e^2}{6 m_e} \left(\sum_{i=1}^Z \langle R_i^2 \rangle \right). \quad (3.52)$$

Количественная оценка величины магнитной восприимчивости диамагнетика по формуле (3.52) приводит к значениям порядка 10^{-7} – 10^{-8} , и поэтому его магнитная проницаемость практически не отличается от единицы.

Полученные выражения не учитывают межатомные взаимодействия и, строго говоря, соответствуют газам. Теория диамагнетизма конденсированного состояния весьма сложна.

3.9. Парамагнетизм

Парамагнетизмом называют явление возникновения в веществе, помещенном во внешнее поле \mathbf{B} , намагниченности \mathbf{J} , ориентированной *по полю*. Он возникает в том случае, когда атомы магнетика обладают *собственным магнитным моментом* и имеют *ориентационный* механизм. К парамагнетикам относятся щелочные металлы, алюминий, жидкий кислород и многие другие вещества.

Если магнитное поле отсутствует, тепловое движение полностью дезориентирует атомные магнитные моменты, и намагниченность вещества также отсутствует. При включении поля ситуация изменяется. Магнитное поле стремится сориентировать магнитные моменты по полю, тогда как тепловое движение препятствует этому процессу. Наличие этих конкурирующих механизмов приводит к тому, что намагниченность парамагнетика зависит и от величины магнитного поля, и от температуры.

Опишем это явление на примере невзаимодействующих атомов щелочного металла (например, паров металла), магнитный момент которых обусловлен наличием спинового момента электрона на внешней оболочке атома. Как отмечалось в разделе 3.1, его магнитный момент

в поле может быть ориентирован либо по полю, либо противоположно, и его проекция на направление поля (ось z) принимает значения

$$(p_{ms})_z = \pm \mu_B. \quad (3.53)$$

Энергия такого атома в магнитном поле также принимает два возможных значения (рис. 3.13):

$$\varepsilon_m = -\mathbf{p}_m \mathbf{B} = \mp \mu_B B. \quad (3.54)$$

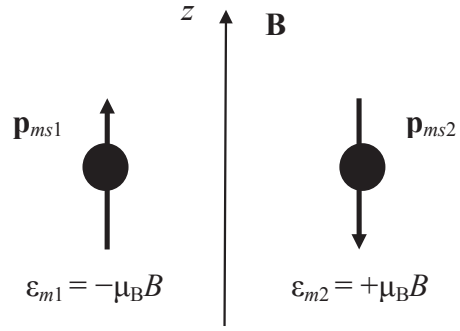


Рис. 3.13

Согласно распределению Больцмана вероятность W обнаружить частицу в том или ином состоянии определяется ее энергией в этом состоянии:

$$W_1 = C e^{-\frac{\varepsilon_{m1}}{kT}} = C e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}, \quad W_2 = C e^{-\frac{\varepsilon_{m2}}{kT}} = C e^{-\frac{-\mu_B B}{kT}}, \quad (3.55)$$

где C — постоянная, которая определяется из условия нормировки:

$$W_1 + W_2 = 1, \quad C = \frac{1}{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} + e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}}. \quad (3.56)$$

Количество моментов, ориентированных по полю, больше, чем направленных противоположно — в этом суть механизма возникновения парамагнетизма. Для вычисления намагниченности вещества найдем среднее значение магнитного момента, приходящееся на один атом:

$$\begin{aligned} \langle p_{ms} \rangle_z &= C_1 (p_{ms})_{z1} + C_2 (p_{ms})_{z2} = \\ &= \mu_B \frac{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} - e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}}{e^{\frac{\mu_B B}{kT}} + e^{-\frac{\mu_B B}{kT}}} = \mu_B \tanh \frac{\mu_B B}{kT}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Намагниченность парамагнетика, имеющего концентрацию атомов n , будет равна

$$J_{\text{пм}} = n \mu_B \tanh \frac{\mu_B B}{kT}. \quad (3.58)$$

Это *формула Ланжевена*, описывающая зависимость намагниченности от величины магнитного поля и температуры вещества. При

фиксированной температуре эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 3.14.

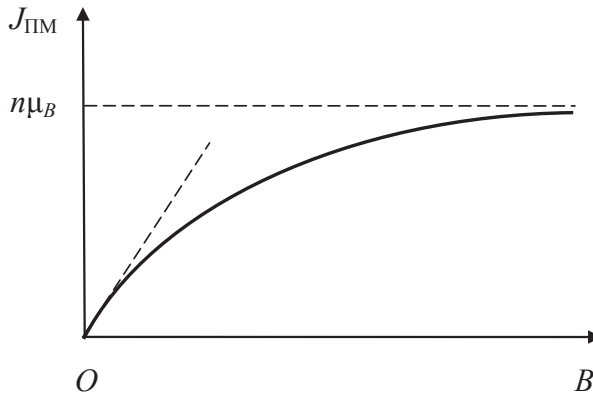


Рис. 3.14

В случае сильных полей (критерием является неравенство $\mu_B B \gg kT$) гиперболический тангенс в формуле (3.58) стремится к единице и

$$J_{\text{ПМ}} = n\mu_B. \quad (3.59)$$

Это означает, что все магнитные моменты атомов ориентированы по полю. Это действительно очень сильные поля, получить которые довольно сложная задача.

В полях не очень сильных (для которых выполняется неравенство $\mu_B B \ll kT$) гиперболический тангенс в формуле (3.58) можно аппроксимировать линейной зависимостью, и тогда

$$J_{\text{ПМ}} = \frac{n\mu_B^2 B}{kT}. \quad (3.60)$$

Перейдем к напряженности магнитного поля H :

$$J_{\text{ПМ}} = \frac{\mu_0 n\mu_B^2 H}{kT},$$

получим выражение для магнитной восприимчивости парамагнетика:

$$\chi_{\text{ПМ}} = \frac{\mu_0 n\mu_B^2}{kT}. \quad (3.61)$$

Ее зависимость от температуры носит название *закона Кюри*:

$$\chi_{\text{пм}} \sim \frac{1}{T}, \quad (3.62)$$

Количественная оценка магнитной восприимчивости парамагнетика с использованием выражения (3.61) приводит к величине, имеющей порядок 10^{-5} . Таким образом, магнитная проницаемость парамагнетика $\mu_{\text{пм}} = 1 + \chi_{\text{пм}} \approx 1$.

В заключение отметим, что парамагнетизм металлов отличается от описанного выше. В частности, практически отсутствует его зависимость от температуры. Такой парамагнетизм называется *аномальным* и имеет квантовую природу.

Задачи к главе 3

Задача 3.1. По длинному цилиндрическому проводнику протекает ток I . Проводник — парамагнетик, имеющий магнитную проницаемость χ . Найти:

- а) поверхностный ток намагничивания $(I_M)_{\text{пов}}$;
- б) объемный ток намагничивания $(I_M)_{\text{об}}$.

Решение. Ток, протекающий по проводнику, создает магнитное поле, линии которого представляют собой концентрические окружности. Это поле ориентирует магнитные моменты кольцевых микротоков на поверхности проводника по вектору \mathbf{B} (рис. 3.15, а), а направление этих микротоков указано на рис. 3.15, б. Они формируют поверхностный ток намагничивания $(I_M)_{\text{пов}}$, направленный противоположно току проводимости I .

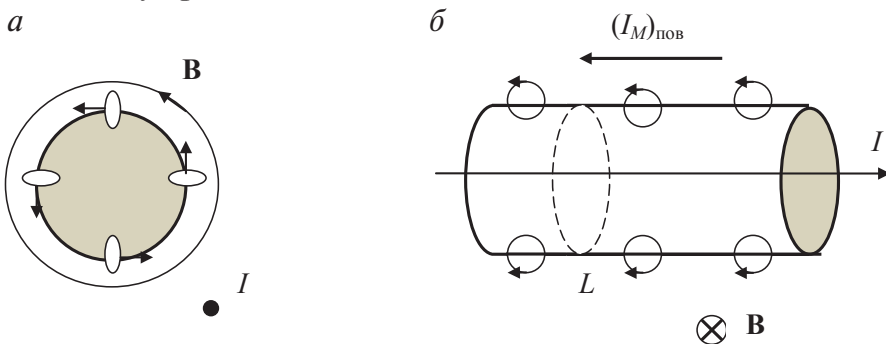


Рис. 3.15

Для его вычисления выберем на поверхности проводника контур L , и тогда

$$(I_M)_{\text{пов}} = i_M \cdot 2\pi R,$$

где i_M — линейная плотность поверхностного тока намагничивания, введенная в разделе 3.2, R — радиус сечения проводника.

Воспользуемся формулами (3.10), (3.22) и (3.23):

$$i_M = J = \chi H = \chi \frac{B}{\mu_0},$$

учтем, что индукция B вблизи поверхности проводника равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

и получим ответ на первый вопрос задачи:

$$(I_M)_{\text{пов}} = \chi I.$$

Для ответа на второй вопрос воспользуемся равенством (3.13) и получим

$$(I_M)_{\text{об}} = -(I_M)_{\text{пов}}.$$

Знак «минус» в этом выражении означает, что эти токи направлены в противоположных направлениях.

Задача 3.2. Однородный шар с магнитной проницаемостью μ помещен во внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 . Чему равна индукция \mathbf{B} поля внутри шара?

Решение. Напряженность \mathbf{H} магнитного поля внутри тела конечных размеров определяется формулой (3.28):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{\text{разм}},$$

где $\mathbf{H}_{\text{разм}}$ — напряженность дополнительного *размагничивающего* поля, связанного с наличием у магнетика определенных границ. Она связана с намагниченностью вещества соотношением

$$\mathbf{H}_{\text{разм}} = N \mathbf{J},$$

где параметр N зависит от формы магнетика и называется *размагничивающим фактором*. Для шара $N = 1/3$.

Таким образом,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - N\mathbf{J} = \mathbf{H}_0 - N\chi\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - N(\mu - 1)\mathbf{H},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + N(\mu - 1)}.$$

Согласно формулам (3.23) и (3.24)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0}, \quad \mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0},$$

и тогда

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mathbf{B}_0}{1 + N(\mu - 1)} = \frac{3\mu\mathbf{B}_0}{\mu + 2}.$$

Задача 3.3. Магнетик с проницаемостью μ , имеющий плоскую поверхность, поместили во внешнее магнитное поле, вектор \mathbf{B}_0 которого образует угол α с нормалью к этой поверхности. Найти модуль B вектора магнитной индукции в магнетике вблизи этой поверхности.

Решение. Модуль вектора B в магнетике можно представить в виде

$$B = \sqrt{B_n^2 + B_\tau^2},$$

где B_n и B_τ — нормальная и тангенциальная составляющие вектора \mathbf{B} , связанные с аналогичными компонентами вектора \mathbf{B}_0 соотношениями (3.35) и (3.37):

$$B_n = B_{0n} = B_0 \cos \alpha,$$

$$B_\tau = \mu B_{0\tau} = \mu B_0 \sin \alpha.$$

Поэтому

$$B = B_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha}.$$

Задача 3.4. Длинный парамагнитный стержень с площадью сечения S расположили таким образом, что один его конец находится внутри катушки с током, где магнитная индукция поля равна B , а другой — в области, где индукция поля пренебрежимо мала. Найти силу, действующую на стержень, если он параллелен оси катушки и его магнитная восприимчивость равна χ .

Решение. В магнитном поле стержень намагничивается и приобретает магнитный момент. Поскольку поле неоднородное, то в соответствии с формулой (2.55) на стержень начинает действовать сила, для вычисления которой поступим следующим образом. Выделим на стержне малый участок длиной dx , обладающий магнитным моментом dp_m (рис. 3.16).

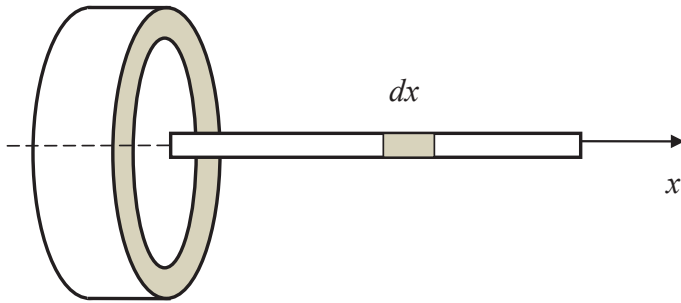


Рис. 3.16

Формула (2.55) в этом случае принимает вид

$$dF_x = dp_m \frac{dB}{dx}.$$

Учтем, что

$$dp_m = JdV = JSdx = \chi HSdx = \chi \frac{B}{\mu_0} Sdx,$$

и тогда

$$dF_x = \chi \frac{B}{\mu_0} SdB.$$

Ответ найдем так:

$$F_x = \int_B^0 \chi \frac{B}{\mu_0} SdB = -\frac{\chi SB^2}{2\mu_0}.$$

Знак «минус» в этом выражении указывает на то, что парамагнетик вытягивается в область более сильного поля.

Задача 3.5. Парамагнитный шарик объемом V переместили из точки поля с магнитной индукцией B в область, где поле отсутствует. Чему равна работа $A_{\text{внеш}}$, совершенная против сил поля, если магнитная восприимчивость материала шарика равна χ ?

Решение. Элементарная работа магнитной силы на перемещении dx

$$dA = F_x dx = p_m \frac{dB}{dx} dx = JV dB = \chi HV dB = \chi \frac{B}{\mu_0} V dB.$$

Найдем полную работу этой силы:

$$A = \int_B^0 \chi V \frac{B}{\mu_0} dB = -\chi V \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Работа внешней силы

$$A_{\text{внеш}} = -A = \chi V \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Задача 3.6. На рис. 3.17 изображена установка, при помощи которой измеряют силу, действующую на парамагнитный образец в неоднородном магнитном поле вблизи полюса электромагнита. Предполагая, что магнитная индукция B изменяется по закону $B = B_0 \exp(-ax^2)$, где $B_0 = 1,50$ Тл, $a = 100 \text{ м}^{-2}$, x — расстояние до полюса, определить:

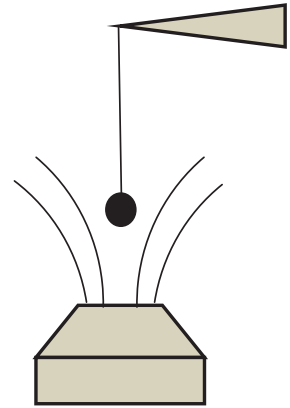


Рис. 3.17

а) зависимость силы натяжения нити от расстояния x ;

б) расстояние x_m , соответствующее максимальному значению F_m силы натяжения;

в) магнитную восприимчивость χ вещества, если $F_m = 160 \text{ мкН}$.

Образец — шарик объемом $V = 41 \text{ мм}^3$.

Решение. В неоднородном поле на образец действует сила, определяемая формулой (2.55):

$$\begin{aligned} F_x = p_m \frac{dB}{dx} &= JV \frac{d}{dx} (B_0 e^{-ax^2}) = \chi \frac{B}{\mu_0} V \frac{dB}{dx} = \chi \frac{B_0 e^{-ax^2}}{\mu_0} V \frac{d}{dx} (B_0 e^{-ax^2}) = \\ &= -2\chi \frac{B_0^2}{\mu_0} V a x e^{-2ax^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Знак «минус», появившийся в этом выражении, указывает на то, что парамагнитный образец втягивается в область более сильного поля, и в дальнейшем он нас интересовать не будет.

Для ответа на второй вопрос исследуем на экстремум полученное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{d|F_x|}{dt} &= 0, \\ e^{-2ax^2} + x(-4ax)e^{-2ax^2} &= 0, \\ 4ax^2 - 1 &= 0, \\ x_m &= \frac{1}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}\tag{2}$$

Магнитную восприимчивость χ вещества мы найдем, подставив выражение (2) в формулу (1):

$$\begin{aligned}F_m &= 2\chi \frac{B_0^2}{\mu_0} Va \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-1/2} = \chi \frac{B_0^2}{\mu_0} Va^{1/2} e^{-1/2}, \\ \chi &= \frac{\mu_0 F_m}{B_0^2 V} \sqrt{\frac{e}{a}} = 3,6 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Видим, что магнитная восприимчивость парамагнетика крайне мала, и поэтому его магнитную проницаемость можно считать равной единице.

Глава 4.

МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ

4.1. Ферромагнетики

Диа- и парамагнетики относятся к *слабмагнитным* материалам — их намагниченность, возникающая при включении внешнего магнитного поля, настолько мала, что для ее изучения требуются очень сильные, обычно неоднородные, поля. Но есть материалы, намагниченность которых оказывается просто громадной — настолько большой, что она может влиять даже на те поля, которые создали ее. Это *сильномагнитные* материалы, и к ним относятся *ферромагнетики* — металлы подгруппы железа, некоторые редкоземельные элементы и сплавы на их основе.

Ферромагнетики обладают уникальными свойствами. Их магнитная восприимчивость принимает значения от тысяч до сотен тысяч единиц. Зависимость намагниченности J от напряженности H магнитного поля носит сложный нелинейный характер (рис. 4.1). Важно отметить, что эта кривая (ее называют *основной кривой намагничения*) получена для случая, когда образец был изначально не намагничен: при $H=0$ его намагниченность $J=0$. С ростом напряженности намагниченность увеличивается и достигает насыщения J_n при $H > H'$. Причину этого явления мы обсудим чуть позже.

На рис. 4.2 приведена зависимость индукции B магнитного поля в ферромагнетике от напряженности внешнего поля H . Вид этой зависимости становится понятен, если учесть, что

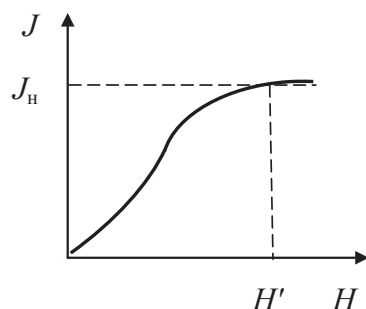


Рис. 4.1

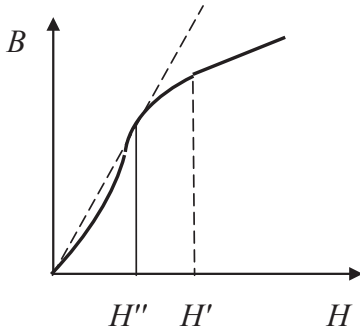


Рис. 4.2

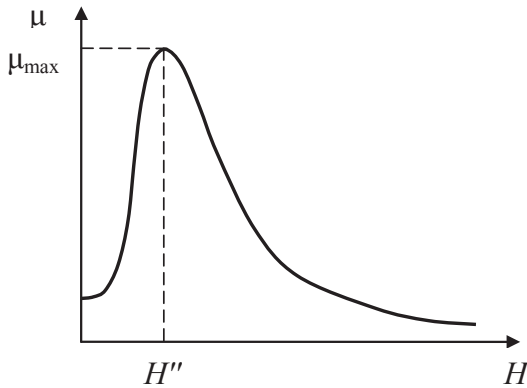


Рис. 4.3

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_0 (H + J). \quad (4.1)$$

Характер этой зависимости также весьма сложен, и, следовательно, магнитная проницаемость μ ферромагнетика, определенная как отношение $\mu = B/H$, является функцией напряженности поля H . Ее график представлен на рис. 4.3. Значения μ_{\max} могут достигать сотен тысяч единиц.

При взгляде на рис. 4.1 создается впечатление, что достаточно получить урав-

нение, описывающее зависимость J от H , изображенную на этом рисунке, и природа ферромагнетизма станет ясна. Но это не так, и ситуация здесь гораздо более сложная. Допустим, в результате увеличения напряженности H мы достигли насыщения (точка 1 на рис. 4.4) и решили уменьшить напряженность поля. Намагниченность образца будет уменьшаться, но вид этой

зависимости окажется уже иным, и при выключении магнитного поля намагниченность образца будет отлична от нуля (точка 2 на рис. 4.4). Это значение J_r называется *остаточной намагниченностью* — образец становится постоянным магнитом. Если изменить направление поля на противоположное и начать увеличивать его, намагниченность будет уменьшаться и обратится в нуль при $H = H_c$ (точка 3 на рис. 4.4). Значение H_c получило название *коэрцитивной силы*. Дальнейшее увеличение напряженности вновь приводит намагниченность к насыщению (точка 1 в левой части рис. 4.4). Проводя описанную выше процедуру в обратном порядке, мы вернемся в точку 1 в правой части рис. 4.4. Зависимость такого вида называют *гистерезисом*, а кривую, изображенную на рис. 4.4 — *петлей гистерезиса*.

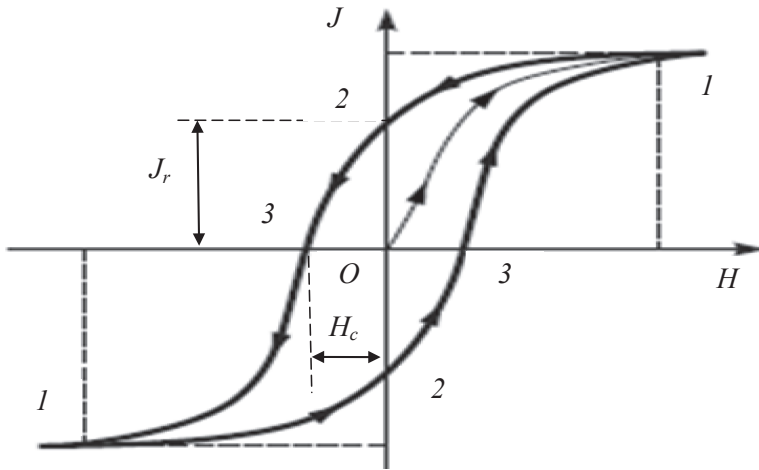


Рис. 4.4

Главный вывод из сказанного заключается в следующем. Невозможно получить аналитическую функциональную связь между намагниченностью ферромагнетика и напряженностью внешнего магнитного поля типа $J = f(H)$, поскольку намагниченность образца в данный момент определяется всей его предысторией.

Если проводить циклическое перемагничивание образца, постепенно уменьшая амплитуду напряженности магнитного поля, то остаточную намагниченность ферромагнетика можно свести к нулю, добившись таким образом размагничивания материала. Сказанное иллюстрирует рис. 4.5.

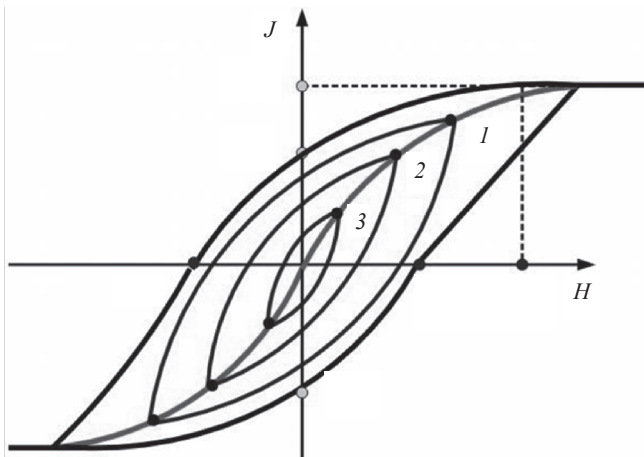
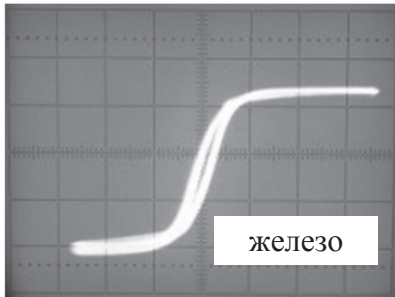


Рис. 4.5

Форма петли гистерезиса может меняться в очень широких пределах. Петля может быть узкой для ферромагнетиков с малыми значениями остаточной намагниченности J_r и коэрцитивной силы H_c (рис. 4.6, а). Такие ферромагнетики называются *мягкими*. Их используют в устройствах, работающих в режиме постоянного перемагничивания, например трансформаторах. Оказывается, процесс перемагничивания сопровождается выделением тепла, причем тепловые потери зависят от ширины петли гистерезиса. К мягким ферромагнетикам относится железо и сплавы на его основе (так называемое трансформаторное железо), применяемые в качестве сердечников различных трансформаторных устройств.

а



б

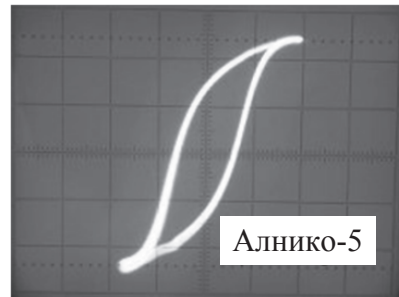


Рис. 4.6

Жесткие ферромагнетики обладают высокими значениями остаточной намагниченности и коэрцитивной силы. Они имеют широкую петлю гистерезиса (рис. 4.6, б) и применяются при производстве постоянных магнитов, а также систем магнитной памяти и хранения информации. Одним из материалов, относящихся к жестким ферромагнетикам, является довольно сложный сплав Алнико-5, содержащий помимо железа никель, кобальт и алюминий. Петля гистерезиса для этого сплава имеет ширину, превышающую ширину петли для трансформаторного железа более чем в 500 раз.

4.2. Структура ферромагнетиков

Все ферромагнетики — кристаллические вещества, и их атомы находятся в узлах кристаллической решетки. Объем ферромагнетика можно представить в виде множества *доменов* — очень малых (но ма-

кроскопических) областей, размеры которых обычно не превышают 1 мкм, разделенных так называемыми *доменными стенками*. Домены имеют *спонтанную* (самопроизвольную) намагниченность. Почему? Оказывается, в пределах одного домена магнитные моменты всех атомов параллельны друг другу (рис. 4.7).

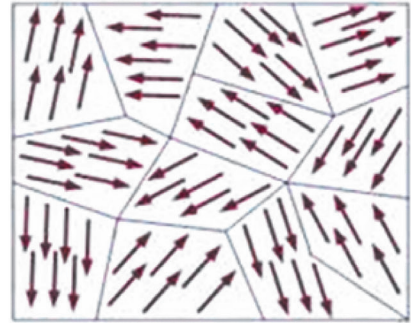


Рис. 4.7

Объяснение этому дает современная квантовая теория магнетизма. Согласно этой теории между соседними атомами ферромагнетика существует сильное *обменное взаимодействие*, которое делает энергетически выгодным такую ориентацию магнитных моментов.

Обычно вектора намагниченности различных доменов направлены хаотично, и поэтому ферромагнетик исходно не намагничен. Однако при включении магнитного поля ситуация изменяется. Домены, у которых вектор намагниченности направлен в сторону магнитного поля, оказываются в энергетически более выгодном положении, и они начинают «пожирать» домены, имеющие менее энергетически выгодную ориентацию магнитных моментов. В процессе такой перестройки доменной структуры происходит движение доменных стенок, и в конечном итоге возникает *однодоменный* образец, вектор намагниченности которого имеет направление, совпадающее с направлением магнитного момента домена, «съевшего» все остальные. При дальнейшем увеличении напряженности поля происходит постепенный поворот этого вектора в направлении поля, и намагниченность образца достигает насыщения J_H (см. рис. 4.1).

Ферромагнетики обладают еще одной важной особенностью: все их уникальные свойства пропадают при нагревании выше определенной температуры, которую называют *точкой Кюри* T_C , и ферромагнетик становится обычным

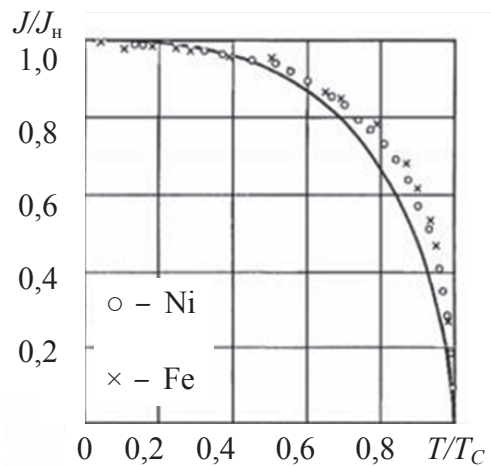


Рис. 4.8

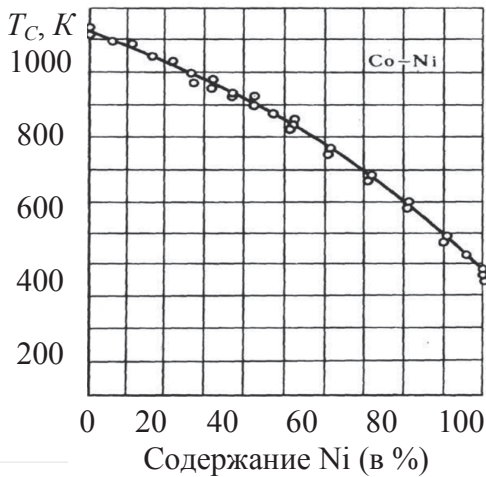


Рис. 4.9

парамагнетиком. Такое скачкообразное превращение относится к *фазовым переходам второго рода*. На рис. 4.8 изображены экспериментальная и теоретическая зависимости намагниченности образцов никеля и железа от температуры. Расчет, выполненный в рамках квантовой теории, дает вполне удовлетворительное согласие с результатами эксперимента.

Интересная зависимость приведена на рис. 4.9. Она показывает влияние содержания никеля

в двойном сплаве кобальт-никель на величину T_C . Переход от чистого кобальта к чистому никелю изменяет ее в три раза! Вообще численные значения T_C лежат в очень широком интервале:

Элемент	Co	Fe	Ni	Gd	GdCl ₃
T_C , К	1388	1043	627	292	2,2

Итак, при температуре, равной T_C , в ферромагнетике происходит фазовый переход второго рода, который приводит к разрушению *магнитного упорядочения* в кристалле — вещество переходит из ферромагнитного состояния в парамагнитное, в котором исчезает спонтанная намагниченность вещества.

4.3. Модель молекулярного поля Вейсса

Много лет природа ферромагнетизма была загадкой для физиков. Ситуация прояснилась только после создания квантовой теории магнетизма. До появления этой теории многие ученые пытались описать это явление с классических позиций, и сейчас мы рассмотрим одну из этих попыток, которая оказалась весьма удачной и качественно смогла описать основные законы ферромагнетизма. Речь идет о *модели молекулярного поля*, которую предложил П. Вейсс в 1907 г. Он предположил,

что в объеме ферромагнетика (ограничимся одним доменом) существует некое вспомогательное *молекулярное поле* $\mathbf{B}_{\text{мол}}$, которое ориентирует магнитные моменты атомов параллельно друг другу. Это поле, по сути, выполняет функцию обменного взаимодействия, про которое мы говорили выше. Вопрос о природе этого поля мы оставляем открытым и, следуя Вейссу, будем считать, что

$$\mathbf{B}_{\text{мол}} = \mu_0 \lambda \mathbf{J}, \quad (4.2)$$

где \mathbf{J} — намагниченность ферромагнетика, γ — постоянная Вейсса.

Таким образом, в объеме домена существует *эффективное поле* $\mathbf{B}_{\text{эфф}}$, в котором находятся магнитные моменты атомов:

$$\mathbf{B}_{\text{эфф}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{мол}} = \mathbf{B} + \mu_0 \lambda \mathbf{J}. \quad (4.3)$$

И вот теперь мы воспользуемся формулой Ланжевена (3.58), полученной в разделе 3.9. Сделать это можно по следующим соображениям. Выражение (3.58) было получено в предположении о том, что атомы вещества не взаимодействуют друг с другом. В нашем случае такое взаимодействие есть — это обменное взаимодействие. Но его мы учли, введя молекулярное поле. Так что есть резон воспользоваться формулой (3.58), записав ее в виде

$$J_{\text{ФМ}} = n\mu_B \tanh \frac{\mu_B B_{\text{эфф}}}{kT} = n\mu_B \tanh \frac{\mu_B (B + \mu_0 \lambda J)}{kT}. \quad (4.4)$$

Обратим внимание на следующее. Формулу (3.58) мы получили, предполагая, что магнитный момент атома квантуется и равен μ_B . Будем пользоваться этим предположением и далее.

Рассмотрим случай $B = 0$:

$$J_{\text{ФМ}} = n\mu_B \tanh \frac{\mu_B \mu_0 \lambda J}{kT}. \quad (4.5)$$

Это трансцендентное уравнение не решается аналитически в элементарных функциях, и мы воспользуемся графическим методом. Делается это так. Обозначим левую часть уравнения (4.5) как x_1 , а правую — x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= J, \\ x_2 &= n\mu_B \tanh \frac{\mu_B \mu_0 \lambda J}{kT}. \end{aligned}$$

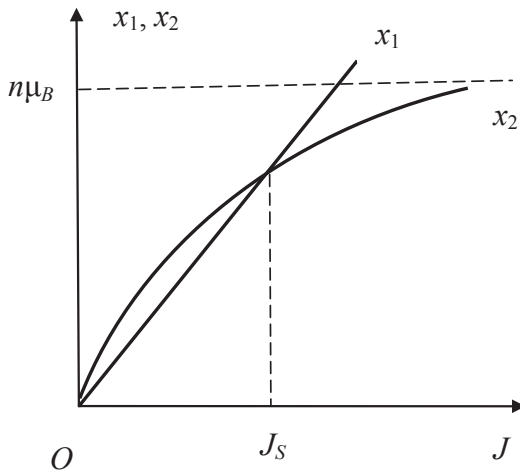


Рис. 4.10

На рис. 4.10 изображены графики зависимости этих функций. Ясно, что решением уравнения (4.5) будут точки пересечения этих графиков. Таких точек две. Первая, при $J = 0$, соответствует тривиальному решению: нет поля — нет и намагниченности. А вот вторая точка указывает на то, что намагниченность в отсутствие внешнего поля может быть отлична от нуля. Таким образом, теория Вейсса допускает *спонтанную намагниченность* J_S

ферромагнетика. Это серьезный результат, и это еще не все. Выражение в правой части уравнения (4.5) зависит от температуры, и это приводит к интересному результату. На рис. 4.11 приведены три графика функции x_2 при трех значениях температуры ферромагнетика.

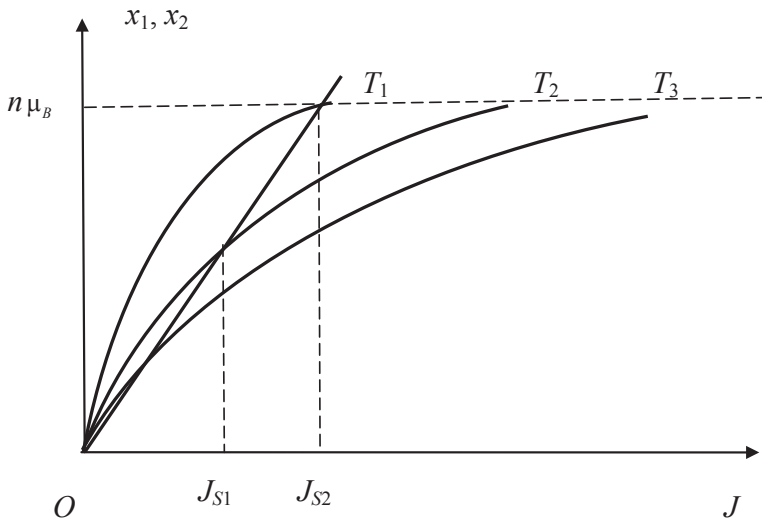


Рис. 4.11

С ростом температуры пересечение функций x_1 и x_2 , дающее значение J_S , смещается к началу координат и обращается в нуль при темпе-

ратуре T_3 , что позволяет заключить, что эта температура соответствует точке Кюри. Таким образом, теория Вейсса предсказывает существование температуры перехода вещества из ферромагнитного в парамагнитное состояние. Эту температуру мы определим с учетом того, что при $J \rightarrow 0$ прямая, соответствующая функции x_1 , является касательной к графику функции x_2 , то есть

$$\left(\frac{dx_1}{dJ} \right)_{J \rightarrow 0} = \left(\frac{dx_2}{dJ} \right)_{J \rightarrow 0}.$$

Производная левой части равенства (4.5) дает единицу, а в правой части с учетом малости аргумента функции x_2 мы воспользуемся приближением $\tanh x \approx x$ и получим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{n\mu_B^2 \mu_0 \lambda}{kT_C}, \\ T_C &= \frac{n\mu_B^2 \mu_0 \lambda}{k}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Формула для точки Кюри — это серьезный успех теории Вейсса, но возникает резонный вопрос: чему равна постоянная Вейсса? Интересно, что в своих первоначальных предположениях Вейсс по некоторым причинам считал, что $\lambda = 1/3$. Но в этом случае, допустим, для никеля $T_C = 0,24$ К, что в 2600 раз меньше экспериментального значения! Теория Вейсса провалилась? Нет. По каким-то неизвестным нам причинам Вейсс предложил считать $\lambda = (2300) \cdot 1/3 \approx 900$ и получил неплохое совпадение не только для никеля, но и для других ферромагнетиков типа железа.

При температурах выше точки Кюри исчезает спонтанная намагниченность ферромагнетика, но если включить внешнее поле, то появится намагниченность вещества. Что предсказывает в этом случае теория Вейсса? Воспользуемся формулой (4.4) и в пределе не очень сильных полей получим

$$J = n\mu_B \tanh \frac{\mu_B (B + \mu_0 \lambda J)}{kT} \approx \frac{n\mu_B^2 B}{kT} + \frac{n\mu_B^2 \mu_0 \lambda J}{kT} = \frac{n\mu_B^2 B}{kT} + \frac{T_C J}{T}, \quad (4.7)$$

и тогда

$$\begin{aligned} J(T - T_C) &= \frac{n\mu_B^2 B}{k}, \\ J &= \frac{n\mu_B^2 B}{k(T - T_C)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Учтем, что $J = \chi H \sim \chi B$, и получим зависимость магнитной восприимчивости от температуры:

$$\chi \sim \frac{1}{T - T_C}, \quad (4.9)$$

которая называется *законом Кюри — Вейсса*.

Подведем итог. Теория Вейсса предсказывает возникновение спонтанной намагниченности в ферромагнетике и наличие точки Кюри. Но она не дает ответа на ряд важных вопросов:

1. Какие вещества являются ферромагнетиками?
2. Чем определяется значение точки Кюри?
3. Почему спонтанная намагниченность существует только в пределах домена?

Ответы на эти вопросы спустя полвека дала квантовая теория.

4.4. Магнитоупорядоченные структуры

Термин *магнитоупорядоченные структуры* объединяет вещества, атомные магнитные моменты которых образуют ту или иную структуру в пространстве — так называемую *магнитную подрешетку* (или несколько подрешеток). Это кристаллические вещества, обладающие доменной структурой. Обычно это металлы и сплавы элементов подгруппы железа и редкоземельных элементов, но могут быть и соединения на основе, например, полупроводников.

С одним типом магнитоупорядоченных структур мы уже знакомы — это ферромагнетики (ФМ). В пределах домена атомные магнитные моменты ориентированы параллельно друг другу (рис. 4.12, *а*), что приводит к появлению спонтанной намагниченности J_S . При нагревании ферромагнетика выше точки Кюри магнитное упорядочение разрушается, и он превращается в парамагнетик, магнитная восприимчивость которого зависит от температуры по закону Кюри — Вейсса (4.8).

К другому типу магнитоупорядоченных структур относятся *антиферромагнетики* (АФМ), магнитная структура которых изображена на рис. 4.12, *б*. Обменное взаимодействие выстраивает магнитные моменты соседних атомов внутри домена противоположно друг другу, поэтому в антиферромагнетиках отсутствует спонтанная намагниченность.

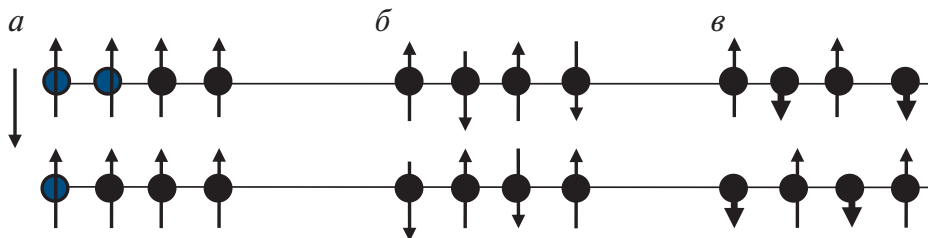


Рис. 4.12

Магнитную структуру АФМ можно представить в виде двух *подрешеток*, вставленных одна в другую (рис. 4.13). Как и в случае ФМ, магнитное упорядочение в АФМ существует лишь в интервале температур, ограниченном температурой, получившей название *точки Нееля* T_N . При $T > T_N$ антиферромагнетик становится обычным парамагнетиком. Приведем значения T_N для ряда редкоземельных элементов, относящихся к АФМ:

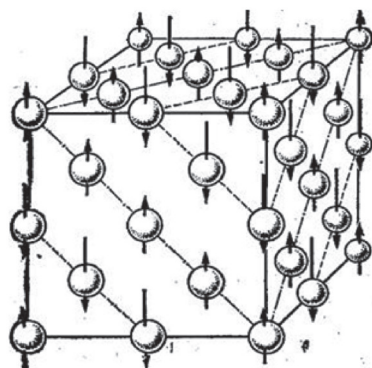


Рис. 4.13

Элемент	Tb	Dy	Ho	Er	Tu
T_N , К	230	179	133	85	80

Многие соединения на основе металлов, принадлежащих подгруппе железа, также являются АФМ. Типичный пример двухрешеточного АФМ — окись марганца MnO .

Намагниченность АФМ возникает в результате взаимодействия магнитных моментов атомов с магнитным полем, которое приводит к нарушению их антипараллельности. По порядку величины этот эффект близок к парамагнетизму. Этим объясняется известный исторический факт: антиферромагнетизм был обнаружен при низкотемпературных исследованиях магнитных свойств парамагнетиков, в ходе которых было установлено отличие в зависимости магнитных восприимчивостей АФМ и ПМ от температуры. Для парамагнетика это закон Кюри (см. (3.62)), а аналогичная зависимость для антиферромагнетика вблизи точки Нееля описывается *законом Нееля*:

$$\chi_{\text{АФМ}} \sim \frac{1}{T + T_N}. \quad (4.10)$$

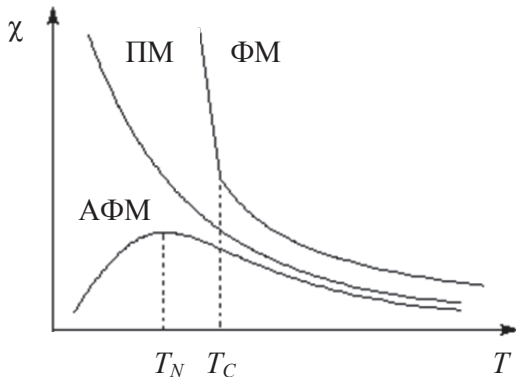


Рис. 4.14

Этот закон, кстати, можно получить из теории Вейсса, если поменять знак у постоянной λ .

На рис. 4.14 изображены зависимости магнитной восприимчивости трех типов магнетиков от температуры.

Рассмотрим еще один тип магнетика с упорядоченной структурой — *ферримагнетики*. С точки зрения магнитной

структуры они напоминают антиферромагнетик (рис. 4.12, в), а по их магнитным свойствам — слабый ферромагнетик. Это вызвано присутствием двух сортов неравных по величине атомных магнитных моментов, ориентированных навстречу друг другу (нескомпенсированный антиферромагнетизм). Ферримагнетики, подобно ферромагнетикам, обладают спонтанной намагниченностью и имеют точку Кюри. При этом между ними существует и принципиальное отличие: ферримагнетики представляют собой главным образом оксидные соединения типа Fe_3O_4 — магнетита, магнитные подрешетки в котором образованы двух- и трехвалентными ионами железа, у которых магнитные моменты направлены противоположно и не равны по величине.

Особую роль играют *ферриты* — ферримагнетики, созданные на основе полупроводников. Их отличает высокое электрическое сопротивление и очень большая магнитная проницаемость — идеальный материал для сердечников различных трансформаторных устройств, эксплуатация которых сопровождается многократным перемагничиванием и, соответственно, тепловыми потерями, которые в данном случае пренебрежимо малы.

Познакомимся с еще одним интересным видом магнитоупорядоченных структур, наблюдаемым в кристаллах редкоземельных элементов. Кристалл можно представить в виде множества атомных слоев, в каждом из которых магнитные моменты атомов параллельны друг другу. При переходе к следующему слою магнитные моменты поворачиваются на некоторый угол, затем еще и еще. В результате направление локального вектора намагничивания при переходе от слоя к слою меняется по спирали.

Задачи к главе 4

Задача 4.1. Прямоугольный ферромагнитный образец объемом $V = 10 \text{ см}^3$, помещенный в магнитное поле, приобрел магнитный момент $p_m = 0,8 \text{ А} \cdot \text{м}^2$. Найти магнитную восприимчивость χ материала образца, если напряженность поля $H = 800 \text{ А/м}$.

Решение. Воспользуемся соотношениями (3.4) и (3.22):

$$p_m = JV = \chi HV$$

и получим

$$\chi = \frac{p_m}{HV} = 10^2.$$

Задача 4.2. Постоянный магнит в форме кольца с прорезью шириной $b = 2,0 \text{ мм}$ имеет средний диаметр $d = 20 \text{ см}$ (рис. 4.15). Найти напряженность поля в материале магнита, если индукция поля в прорези $B_0 = 40 \text{ мТл}$.

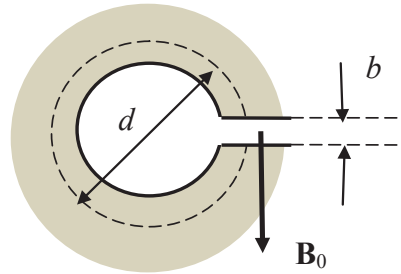


Рис. 4.15

Решение. Применим теорему о циркуляции вектора напряженности H по контуру, изображенному пунктиром на рис. 4.15, и учтем, что токи проводимости отсутствуют. Направление обхода контура выберем по часовой стрелке:

$$H_\tau (\pi d - b) + H_{0\tau} b = 0,$$

где H_τ — проекция вектора напряженности поля в магните на направление обхода. $H_{0\tau}$ — проекция напряженности поля в прорези, причем $H_{0\tau} = B_0/\mu_0$. Тогда

$$H_\tau = -\frac{bB_0}{\mu_0(\pi d - b)} \approx -\frac{bB_0}{\mu_0\pi d}.$$

Знак «минус» в этом выражении указывает на то, что направления векторов \mathbf{H} и \mathbf{B}_0 противоположны.

Таким образом,

$$H = \frac{bB_0}{\mu_0 \pi d} = 0,10 \text{ кА/м.}$$

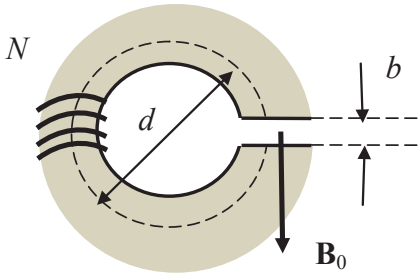


Рис. 4.16

Задача 4.3. На железный тороид со средним диаметром $d = 50$ см намотано $N = 1000$ витков провода, по которому протекает ток $I = 0,85$ А. В тороиде имеется поперечный зазор шириной $b = 1,0$ мм (рис. 4.16), в котором магнитная индукция поля $B_0 = 0,75$ Тл. Какова магнитная проницаемость материала в этих условиях?

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции напряженности поля, взяв в качестве контура обхода окружность диаметром d , изображенную пунктиром на рис. 4.16:

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI.$$

В железе $H = B/\mu\mu_0$, в зазоре $H_0 = B_0/\mu_0$, а по условию (3.33) $B = B_0$, поэтому

$$\mu = \frac{\pi d B}{\mu_0 NI - b B} = 3,7 \cdot 10^3.$$

Задача 4.4. На цилиндрический постоянный магнит длиной $l = 15$ см равномерно намотали $N = 300$ витков провода, по которому пропустили ток $I = 3,0$ А. Это привело к исчезновению поля, создаваемого магнитом. Какова коэрцитивная сила H_C ферромагнетика, из которого сделан магнит?

Решение. Провод, намотанный на магнит, представляет собой соленоид, напряженность H поля которого и равна коэрцитивной силе H_C ферромагнетика, из которого сделан магнит:

$$H = nI = \frac{N}{l} I = 6 \text{ кА/м.}$$

Задача 4.5. Используя основную кривую намагничения, изображенную на рис. 4.17, найти напряженность H поля, при котором магнитная проницаемость μ принимает максимальное значение. Оценить μ_{\max} .

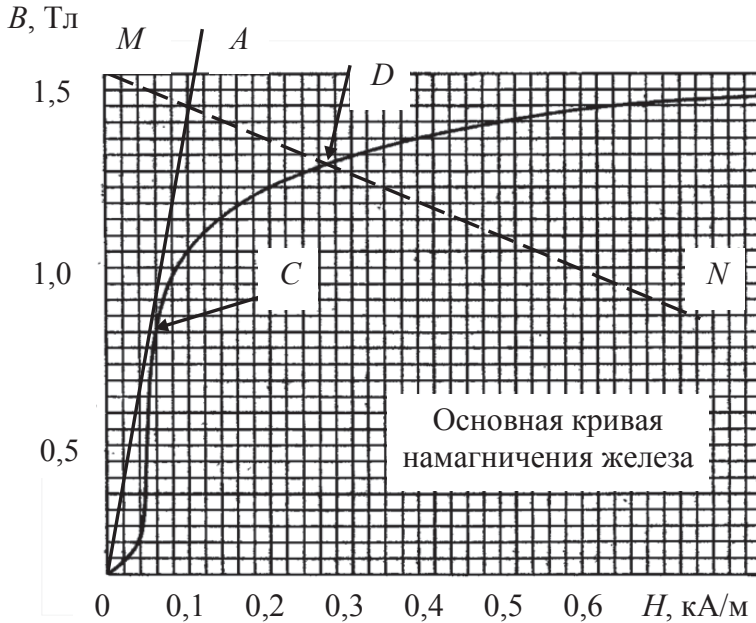


Рис. 4.17

Решение. Магнитная проницаемость вещества определяется соотношением (3.23):

$$B = \mu \mu_0 H,$$

из которого следует, что

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Наибольшее значение отношения B/H легко оценить графически, проведя к графику зависимости $B(H)$ касательную OA (рис. 4.17), которая образует с осью H максимальный угол, соответствующий наибольшему отношению B/H .

Как видно из рисунка, точка касания C соответствует значениям $H = 0,06$ кА/м, и $B = 0,75$ Тл. Поэтому

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 1,0 \cdot 10^4.$$

Задача 4.6. На железное кольцо со средним диаметром $d = 50$ см намотано $N = 800$ витков провода, по которому протекает ток $I = 3,0$ А. В тороиде имеется поперечный зазор шириной $b = 2,0$ мм (рис. 4.16). Какова магнитная проницаемость материала в этих условиях? Использовать основную кривую намагничивания, изображенную на рис. 4.17.

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции напряженности поля, взяв в качестве контура обхода окружность диаметром d , изображенную пунктиром на рис. 4.16:

$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI.$$

В железе $H = B/\mu\mu_0$, в зазоре $H_0 = B_0/\mu_0$, а по условию (3.33) $B = B_0$, поэтому

$$B = \frac{\mu_0 NI}{b} - \frac{\mu_0(\pi d - b)}{b} \approx 1,51 - 0,98H.$$

График этой зависимости изображен на рис. 4.17 в виде прямой MN . Ее пересечение с основной кривой намагничивания (точка D) имеет координаты $H = 0,26$ кА/м, $B = 1,25$ Тл и дает ответ:

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 4 \cdot 10^3.$$

Библиографический список

1. Валишев М. Г. Курс общей физики : учеб. пособие / М. Г. Валишев, А. А. Повзнер. Санкт-Петербург : Лань, 2009. 576 с.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для вузов. В 5 кн. Кн. 2. Электричество и магнетизм / И. В. Савельев. Москва : Астрель : АСТ, 2003. 336 с.
3. Иродов И. Е. Основные законы электромагнетизма : учеб. пособие / И. Е. Иродов. Москва : Высшая школа, 1991. 289 с.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2012. 432 с.

Оглавление

Глава 1.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	3
1.1. Электрический ток	3
1.2. Уравнение непрерывности	6
1.3. Закон Ома для однородного участка цепи. Сопротивление проводников	7
1.4. Сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи	10
1.5. Классическая теория электропроводности. Закон Ома ...	12
Задачи к главе 1	15

Глава 2.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	22
2.1. Взаимодействие токов. Магнитное поле	22
2.2. Закон Био — Савара — Лапласа. Расчет магнитных полей	24
2.3. Магнитное поле движущегося заряда	26
2.4. Магнитное поле: основные законы	27
2.5. Поле соленоида	31
2.6. Сила Лоренца	33
2.7. Движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле	37
2.8. Ускорители заряженных частиц	40
2.9. Эффект Холла	42
2.10. Сила Ампера	44
2.11. Контур с током в магнитном поле	46
2.12. Контур с током в неоднородном магнитном поле	47
2.13. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле	48
Задачи к главе 2	49

Глава 3.	
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	67
3.1. Микроскопические магнитные моменты	67
3.2. Намагниченность вещества. Токи намагничивания	68
3.3. Связь токов намагничивания с намагниченностью вещества	70
3.4. Напряженность H магнитного поля. Связь напряженности поля и намагниченности вещества.....	72
3.5. Магнитное поле в веществе	74
3.6. Условия на границе раздела двух магнетиков.....	76
3.7. Магнитомеханические явления.....	78
3.8. Диамагнетизм	79
3.9. Парамагнетизм	82
Задачи к главе 3	85
 Глава 4.	
МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ	91
4.1. Ферромагнетики.....	91
4.2. Структура ферромагнетиков.....	94
4.3. Модель молекулярного поля Вейсса	96
4.4. Магнитоупорядоченные структуры.....	100
Задачи к главе 4	103
 Библиографический список.....	107

Учебное издание

Малышев Леонид Григорьевич
Повзнер Александр Александрович

Избранные главы курса физики:
МАГНИТОСТАТИКА

Редактор Т. Е. Мерц
Верстка О. П. Игнатъевой

Подписано в печать 14.02.2019. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 9,0.
Уч.-изд. л. 6,3. Тираж 40 экз. Заказ 17

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
<http://print.urfu.ru>

